天一大联考

2020—2021 学年高中毕业班阶段性测试（六）

文科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

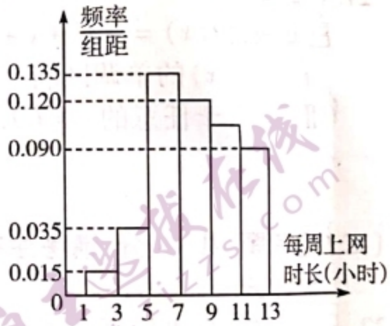
1. 若复数 $z=\frac{2\,021-\mathrm{i}}{1+2\,021\mathrm{i}}$，则 $\overline{z}=$

A. i　　B. $-2\,021$　　C. $2\,021\mathrm{i}$　　D. -1

2. 已知集合 $A=\{x\,|\,|x|<1\}$，$B=\{x\,|\log_2 x\leqslant 2\}$，则 $A\cup B=$

A. $(0,2)$　　B. $(-1,4)$　　C. $(-1,4]$　　D. $(0,4]$

3. 某学校研究性学习小组对该校高一学生每周上网时长情况进行调查，从高一的全体 2 000 名学生中随机抽取了 100 名学生进行问卷调查，得到如图所示的频率分布直方图，则下列说法正确的是



A. 每周上网时长的中位数位于$[5,7)$内

B. 全年级学生每周上网时长低于 11 小时的人数约为 1 640

C. 每周上网时长的众数位于$[7,9)$内

D. 每周上网时长的平均数位于$[5,7)$内

4. 下列叙述中正确的是

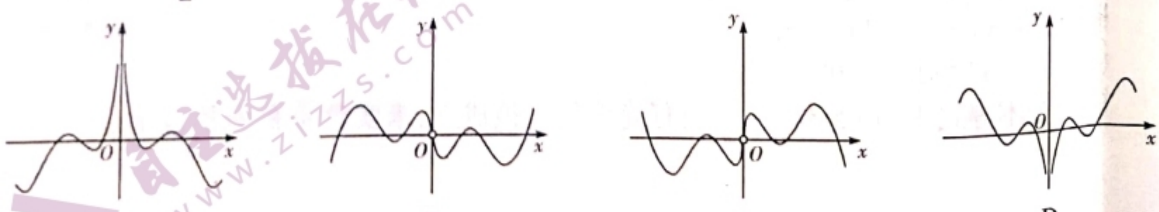
A. 命题“$\exists x_0\in\mathbf{R},2\,021x_0^2-2x_0+1\leqslant 0$”的否定是“$\exists x_0\in\mathbf{R},2\,021x_0^2-2x_0+1>0$”

B. “$a^2=1$”是“直线 $x+y=0$ 和直线 $x-ay=0$ 垂直”的充分而不必要条件

C. 命题“若 $m^2+n^2=0$，则 $m=0$ 且 $n=0$”的否命题是“若 $m^2+n^2\neq 0$，则 $m\neq 0$ 且 $n\neq 0$”

D. 若 $p\vee q$ 为真命题，$p\wedge q$ 为假命题，则 p,q 一真一假

5. 函数 $f(x)=\frac{1}{2}\ln|x|\cos 3x$ 的部分图象可能是



A　　B　　C　　D

6. 若 $\tan\left(\frac{9\pi}{4}-\alpha\right)=-\frac{3}{5}$，则 $\cos 2\alpha=$

A. $-\frac{15}{17}$　　B. $-\frac{2}{17}$　　C. $\frac{2}{17}$　　D. $\frac{15}{17}$

7. 人类通常有 O，A，B，AB 四种血型，某一血型的人能给哪些血型的人输血，是有严格规定的，输血法则可归结为 4 条：①X→X；②O→X；③X→AB；④不满足上述 3 条法则的任何关系式都是错误的(其中 X 代表 O，A，B，AB 中某种血型，箭头左边表示供血者，右边表示受血者). 已知我国 O，A，B，AB 四种血型的人数所占比例分别为 41%，28%，24%，7%，在临床上，按照规则，若受血者为 A 型血，则一位供血者不能为这位受血者正确输血的概率为

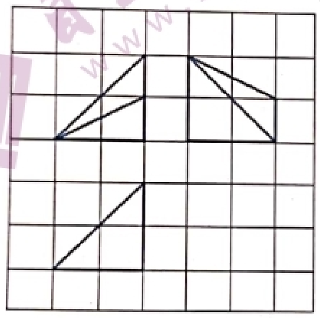
A. 0.27　　B. 0.31　　C. 0.42　　D. 0.69

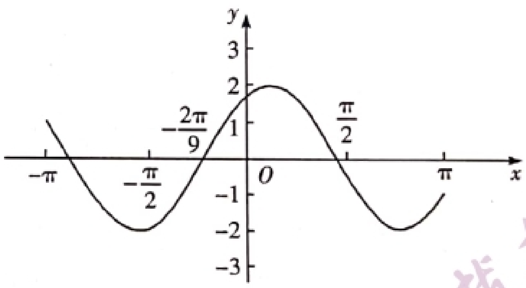
8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}3^{x-1}-1, x\geq 1,\\ -1-\log_3(x+5), x<1,\end{cases}$ 且 $f(m)=-2$，则 $f(6+m)=$

A. -16　　B. 16　　C. 26　　D. 27

9. 如图，网格纸上小正方形的边长均为 1，粗实线画出的是某几何体的三视图，则该几何体的体积为

A. 6　　B. 4　　C. 3　　D. 2


（第 9 题图）



（第 10 题图）

10. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的大致图象如图所示，则 $f(x)$ 的最小正周期为

A. $\frac{3\pi}{2}$　　B. $\frac{4\pi}{3}$　　C. $\frac{5\pi}{4}$　　D. $\frac{7\pi}{6}$

11. 已知点 F 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点，过 F 作一条渐近线的垂线，垂足为 A，若 $\triangle OAF$(点 O 为坐标原点)的面积为 2，双曲线的离心率 $e\in[\sqrt{17},\sqrt{65}]$，则 a 的取值范围为

A. $[1,2]$　　B. $[1,\sqrt{2}]$　　C. $\left[\frac{\sqrt{2}}{4},1\right]$　　D. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$

12. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$，且对任意的 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>2$，$f(1)=2\,020$，则满足不等式 $f(x-2\,020)>2(x-1\,011)$ 的 x 的取值范围是

A. $(2\,021,+\infty)$　　B. $(2\,020,+\infty)$　　C. $(1\,011,+\infty)$　　D. $(1\,010,+\infty)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$，$\boldsymbol{a}\parallel(2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$，则 $k=$________.

14. 若抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上的点 M 到焦点 F 的距离与到 y 轴的距离之差为2，则 $p=$________.

15. 棱长为 2 的正四面体 $ABCD$ 的外接球的球心为 O，过点 A,B,O 的平面截四面体 $ABCD$ 所得截面的面积为________.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，已知 $A=60°$，$b+c=6$，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$，则 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径为________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}(n\geq2)$，且 $a_2=2$，$a_5=4a_3$.

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若 $b_n=n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{n-1}$，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18.（12 分）

为弘扬劳动精神，树立学生"劳动最美，劳动最光荣"的观念，某校持续开展"家庭劳动大比拼"活动. 某班统计了本班同学 1～7 月份的人均月劳动时间（单位：小时），并建立了人均月劳动时间 y 关于月份 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+4$，y 与 x 的原始数据如下表所示：

月份 x	1	2	3	4	5	6	7
人均月劳动时间 y	8	9	m	12	n	19	22

由于某些原因导致部分数据丢失，但已知 $\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i=452$.

（Ⅰ）求 m,n 的值；

（Ⅱ）求该班 6 月份人均月劳动时间数据的残差值（残差即样本数据与预测值之差）.

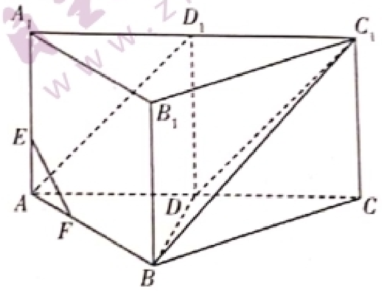
参考公式：在线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中，$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

19.（12 分）

如图所示，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC，$AA_1\perp AC$，D,D_1 分别为 AC,A_1C_1 的中点且 $AD=AA_1$，$DB\perp AC$.

（Ⅰ）在棱 AA_1 上找一点 M，使得 $D_1M//$ 平面 DBC_1，并说明理由；

（Ⅱ）若 $2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EA_1}$，$\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$，证明：$EF\perp AD_1$.



20.（12 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点 $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，其下顶点为点 A. 若斜率存在的直线 l 交椭圆 E 于 P,Q 两点，且不过点 A，直线 AP,AQ 分别与 x 轴交于 M,N 两点.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程.

（Ⅱ）当 M,N 的横坐标的乘积是 $\frac{4}{3}$ 时，试探究直线 l 是否过定点. 若过定点，请求出定点坐标；若不过，请说明理由.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=-x^2+x+\ln x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若对于任意的 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)\leqslant mxe^x-x^2-1$ 恒成立，求实数 m 的最小值.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22,23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.［选修 4－4：坐标系与参数方程］（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+3t,\\ y=1-4t\end{cases}$（$t$ 为参数）. 以坐标原点为极点，以 x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2(4-3\sin^2\theta)=4$.

（Ⅰ）求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程；

（Ⅱ）设点 M 在直线 l 上，点 N 在曲线 C 上，求 $|MN|$ 的最小值.

23.［选修 4－5：不等式选讲］（10 分）

设函数 $f(x)=|x-1|+|3x+1|$.

（Ⅰ）求 $f(x)\geqslant 2x-1$ 的解集；

（Ⅱ）若不等式 $3f(x)\geqslant 3m^2-m$ 对任意实数 x 恒成立，求实数 m 的取值范围

天一大联考
2020—2021 学年高中毕业班阶段性测试(六)
文科数学・答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. A	2. C	3. B	4. D	5. D	6. A
7. B	8. C	9. D	10. B	11. D	12. A

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 0　　14. 4

15. $\sqrt{2}$　　16. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. 解析 (Ⅰ)由 $a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}(n\geqslant2)$,可知$\{a_n\}$为等比数列,设其公比为 q.

由 $a_5=4a_3$,可得 $q^2=4$,解得 $q=-2$(舍去)或 $q=2$. ……(3 分)

由 $a_2=2$,可得 $a_1=1$,所以$\{a_n\}$是首项为 1,公比为 2 的等比数列,故 $a_n=2^{n-1}$. ……(6 分)

(Ⅱ)根据(Ⅰ)可知 $b_n=n\cdot2^{n-1}$, ……(7 分)

所以 $T_n=1\times2^0+2\times2^1+3\times2^2+\cdots+n\times2^{n-1}$, ……(8 分)

$2T_n=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$, ……(9 分)

两式相减,得 $-T_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\times2^n=\dfrac{1\times(1-2^n)}{1-2}-n\times2^n=(1-n)2^n-1$, ……(11 分)

所以 $T_n=(n-1)2^n+1$. ……(12 分)

18. 解析 (Ⅰ)因为 $\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i=342+3m+5n=452$,

所以有 $3m+5n=110$. ① ……(1 分)

$\bar{x}=4,\bar{y}=\dfrac{70+m+n}{7}$. ……(2 分)

由回归直线必过样本点的中心$(\bar{x},\bar{y})$,得$\dfrac{70+m+n}{7}=4\hat{b}+4$,

即 $m+n=28\hat{b}-42$. ② ……(3 分)

又 $\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2=(1-4)^2+(2-4)^2+\cdots+(7-4)^2=28$,

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i-7\bar{x}\cdot\bar{y}}{28}=\dfrac{452-4(70+m+n)}{28}$,

所以 $m+n=43-7\hat{b}$. ③ ……(5 分)

联立①②③,解得 $\hat{b}=\dfrac{17}{7},m=10,n=16$. ……(8 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知线性回归方程为 $\hat{y}=\dfrac{17}{7}x+4$,

所以当 $x=6$ 时,预测值 $\hat{y}=\dfrac{17}{7}\times6+4=\dfrac{130}{7}$, ……(10 分)

此时残差为 $19-\dfrac{130}{7}=\dfrac{3}{7}$. ……(12 分)

19. 解析 (Ⅰ)当 M 与 A 重合时,D_1M∥平面 DBC_1. ……(1 分)

理由如下：$\because D_1C_1 /\!/ AD$，且 $D_1C_1 = AD$，

$\therefore$ 四边形 D_1C_1DA 为平行四边形，…………（4 分）

$\therefore D_1A /\!/ C_1D$，

又 $C_1D \subset$ 平面 BDC_1，

$\therefore D_1M /\!/$ 平面 DBC_1. …………（6 分）

（Ⅱ）如图，连接 A_1D, A_1B，$\because$ 平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 ABC，$AA_1 \perp AC$，

$\therefore AA_1 \perp$ 平面 ABC，

$\therefore AA_1 \perp AD, AA_1 \perp DB$.

又 $AD = AA_1$，

$\therefore$ 四边形 A_1ADD_1 是正方形，

$\therefore A_1D \perp AD_1$.

又 $DB \perp AC, AC \cap AA_1 = A$，

$\therefore DB \perp$ 平面 AA_1D_1D，…………（8 分）

$\therefore AD_1 \perp DB$.

$\because A_1D \cap DB = D$，

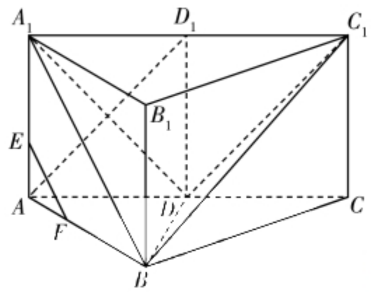
$\therefore AD_1 \perp$ 平面 A_1DB，

$\therefore AD_1 \perp BA_1$. …………（10 分）

由 $2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EA_1}$，$\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ 可知，E, F 分别是棱 AA_1, AB 上靠近点 A 的三等分点，

$\therefore EF /\!/ BA_1$，

$\therefore EF \perp AD_1$. …………（12 分）



20. **解析**　（Ⅰ）由 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$，可得 $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$，

将 $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 代入椭圆方程，得 $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$，…………（2 分）

解得 $\begin{cases} b^2 = 1, \\ a^2 = 4, \end{cases}$ 所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. …………（4 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $A(0, -1)$. 设直线 PQ 的方程为 $y = kx + m (m \neq -1)$，P, Q 的坐标分别为 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$.

直线 AP 的方程为 $y = \frac{y_1 + 1}{x_1}x - 1$，

令 $y = 0$，得点 M 的横坐标为 $x_M = \frac{x_1}{y_1 + 1}$. …………（6 分）

直线 AQ 的方程为 $y = \frac{y_2 + 1}{x_2}x - 1$，

令 $y = 0$，得点 N 的横坐标为 $x_N = \frac{x_2}{y_2 + 1}$. …………（7 分）

所以 $x_M \cdot x_N = \frac{x_1x_2}{(y_1 + 1)(y_2 + 1)} = \frac{x_1x_2}{(kx_1 + m + 1)(kx_2 + m + 1)}$

$=\dfrac{x_1x_2}{k^2x_1x_2+k(m+1)(x_1+x_2)+(m+1)^2}$. …………………………………………………… (8 分)

把 $y=kx+m$ 代入 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$,

由根与系数的关系可得 $x_1+x_2=-\dfrac{8km}{4k^2+1}$, $x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{4k^2+1}$, …………………………………… (10 分)

又由 $x_M\cdot x_N=\dfrac{4}{3}$,得 $\dfrac{4(m-1)}{m+1}=\dfrac{4}{3}$,解得 $m=2$,所以直线 l 过定点 $(0,2)$. ………………… (12 分)

21. **解析** (Ⅰ)函数 $f(x)=-x^2+x+\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

且 $f'(x)=-2x+1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-2x^2+x+1}{x}=\dfrac{(2x+1)(-x+1)}{x}$. ……………………………………… (2 分)

当 $f'(x)>0$ 时,可得 $0<x<1$,则 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$; ………………………………………… (4 分)

当 $f'(x)<0$ 时,可得 $x>1$,则 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(1,+\infty)$. ……………………………………… (6 分)

(Ⅱ)若对于任意的 $x\in(0,+\infty)$, $f(x)\leqslant mxe^x-x^2-1$ 恒成立,可得 $mxe^x-x^2-1\geqslant -x^2+x+\ln x$ 恒成立,

即 $m\geqslant\dfrac{x+\ln x+1}{xe^x}$ 恒成立. …………………………………………………………………………… (7 分)

设 $F(x)=\dfrac{x+\ln x+1}{xe^x}$,则 $F'(x)=\dfrac{-(x+\ln x)(x+1)e^x}{x^2e^{2x}}$. ……………………………………………… (8 分)

设 $h(x)=x+\ln x$,可知函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,且 $h\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}-1<0$, $h(1)=1>0$,

所以存在 $x_0\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$,使得 $h(x_0)=x_0+\ln x_0=0$,

可得当 $0<x<x_0$ 时, $h(x)<0$, $F'(x)>0$,函数 $F(x)$ 单调递增,

当 $x>x_0$ 时, $h(x)>0$, $F'(x)<0$,函数 $F(x)$ 单调递减,

则函数 $F(x)$ 在点 x_0 处取得最大值. ……………………………………………………………………… (10 分)

根据 $h(x_0)=x_0+\ln x_0=0$,可得 $x_0=-\ln x_0$, $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$,

则 $F(x)_{\max}=F(x_0)=\dfrac{x_0+\ln x_0+1}{x_0e^{x_0}}=1$,

故 m 的最小值为 1. ……………………………………………………………………………………… (12 分)

22. **解析** (Ⅰ)消去参数 t 得直线 l: $4x+3y-11=0$. …………………………………………………………… (2 分)

曲线 C: $4\rho^2-3\rho^2\sin^2\theta=4$,

将 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ 代入得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$. …………………………………… (5 分)

(Ⅱ)曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数),设点 $N(\cos\beta,2\sin\beta)$.

因为点 N 到直线 l 的距离为 $\dfrac{|4\cos\beta+6\sin\beta-11|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|2\sqrt{13}\sin(\beta+\varphi)-11|}{5}$,其中 $\tan\varphi=\dfrac{2}{3}$, ……… (8 分)

所以 $|MN|_{\min}=\dfrac{11-2\sqrt{13}}{5}$. ……………………………………………………………………… (10 分)

23. **解析** (Ⅰ)由题意得 $f(x)=\begin{cases}4x, x>1,\\ 2x+2, -\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1,\\ -4x, x<-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$ ………………………………………………………… (2 分)

因为 $f(x)\geqslant 2x-1$,所以 $\begin{cases}x>1,\\ 4x\geqslant 2x-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x+2\geqslant 2x-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<-\dfrac{1}{3},\\ -4x\geqslant 2x-1,\end{cases}$ ……………………

解得 $x>1$ 或 $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$ 或 $x<-\frac{1}{3}$，……………………………………（4 分）

所以 $f(x)\geqslant 2x-1$ 的解集为 $\mathbf{R}$. ……………………………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)$ 的最小值为 $2\left(-\frac{1}{3}\right)+2=\frac{4}{3}$. ……………………………………（7 分）

因为不等式 $3f(x)\geqslant 3m^2-m$ 对任意实数 x 恒成立，

所以 $3\times\frac{4}{3}\geqslant 3m^2-m$，即 $3m^2-m-4\leqslant 0$，$(m+1)(3m-4)\leqslant 0$，所以 $-1\leqslant m\leqslant\frac{4}{3}$，……………（9 分）

故实数 m 的取值范围是 $\left[-1,\frac{4}{3}\right]$. ……………………………………（10 分）