

姓 名 _____

准考证号 _____

绝密★启用前

湘 豫 名 校 联 考
2023 年 2 月 高三 春季 入学 摸底 考试
数 学 (理 科)

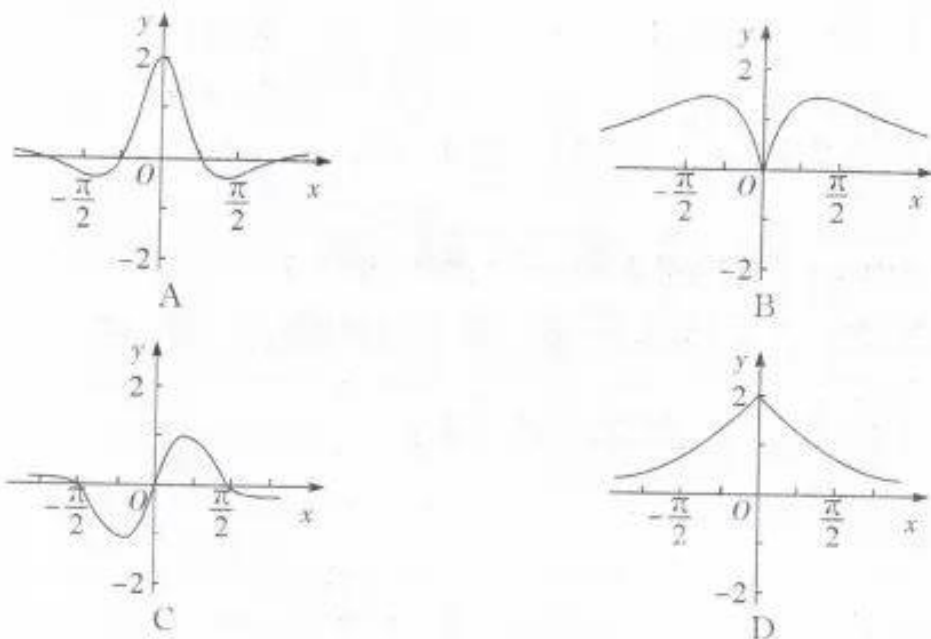
注意事项:

1. 本试卷共 6 页, 时间 120 分钟, 满分 150 分。答题前, 考生先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上, 然后将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 答题卡上印有题号, 考生答题时, 请用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 先用橡皮擦干净, 再涂黑。作答非选择题时, 将答案写在答题卡上对应题目的答案区域。
3. 考试结束后, 将试卷和答题卡一并交回。

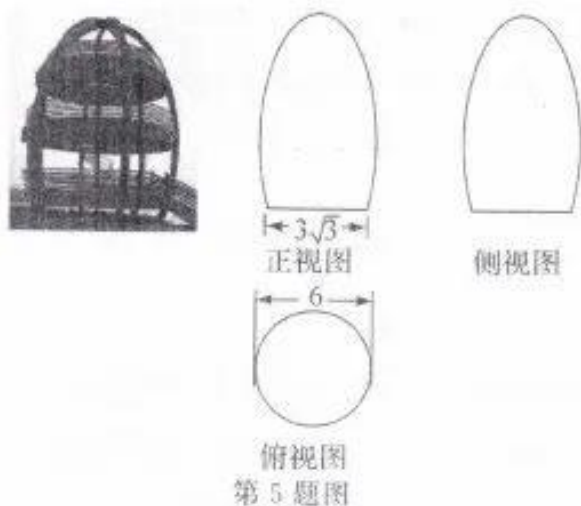
一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。来源: 高三答案公众号

1. 已知集合 $A = \{y \mid y = \sin x, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid x(x-3) < 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()
A. $(1, 3]$ B. $(0, 1]$ C. $[-1, 3)$ D. $(0, 1)$
2. 复数 $z = \frac{3-i}{4+5i}$ 的共轭复数是 ()
A. $\frac{7}{41} + \frac{19}{41}i$ B. $\frac{7}{41} - \frac{19}{41}i$ C. $-\frac{7}{41} + \frac{19}{41}i$ D. $-\frac{7}{41} - \frac{19}{41}i$
3. 2022 年秋, 某京剧演员因疫情原因无法演出, 在短视频平台开设自己的账号, 不断直播京剧知识。初始直播时已有 50 名粉丝, 经过 x 天后, 粉丝人数 $F(x)$ 满足关系式: $F(x) = M \cdot e^{kx}$ ($x \geq 0$), 其中 M, k 为常数, 若开播 10 天后有 200 名粉丝, 则开播 30 天后预计该京剧演员在平台上的粉丝数量为 ()
A. 600 B. 800 C. 3 200 D. 3 400
4. 函数 $f(x) = \frac{2-4\sin^2 x}{2x^2+1}$ 的图象可能为 ()

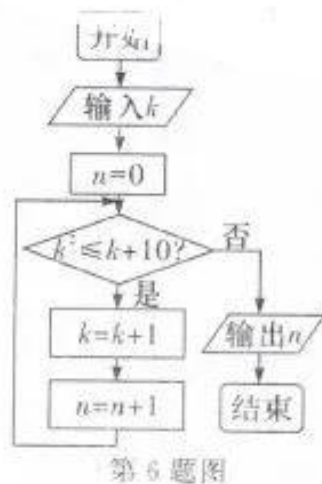
数学(理科)试题 第 1 页(共 6 页)



5. 河南一国家级湿地,以其独特的地理环境和良好的生态环境,吸引了全国近三分之一的候鸟在此繁衍生息,成了鸟类自然保护区.天鹅戏水、白鹭觅食,形成了一道亮丽的风景线.该保护区新建一个椭球形状的观鸟台,椭球的一部分位于地面上,另外部分在空中(单位:米)如下,正视图中椭圆(部分)的长轴长为 16 米,则该观鸟台款地的高度是()米,则观鸟台与地面的夹角为()
- A. 8 米 B. 10 米 C. 12 米 D. 14 米



第 5 题图



第 6 题图

6. 执行如图所示的程序框图,若输入 k 的值为 1,则输出 n 的值为 ()
- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
7. 若一个数列的后项与其相邻的前项的差值构成的数列为等差数列,则称此数列为二阶等差数列.现有二阶等差数列:2,3,5,8,12,17,23,⋯,设此数列为 $\{a_n\}$,若数列



- $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{1}{a_{n+1} - 2}$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n =$ ()
- A. $\frac{n+1}{n}$ B. $\frac{2(n+1)}{n}$ C. $\frac{n}{n+1}$ D. $\frac{2n}{n+1}$
8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 与双曲线 C 交于 A, B 两点 (点 A 在第二象限), 且 $|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2}|F_1F_2|$, 则双曲线 C 的离心率为 ()
- A. $\frac{\sqrt{13}+1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{7}+1}{3}$ D. $\sqrt{5}$
9. 某汽车公司最近研发了一款新能源汽车, 以单次最大续航里程 500 公里为标准进行测试, 且每辆汽车是否达到标准相互独立, 设每辆新能源汽车达到标准的概率为 $p (0 < p < 1)$, 当 100 辆汽车中恰有 80 辆达到标准时的概率取最大值时, 若记该款新能源汽车的单次最大续航里程为 X , 且 $X \sim N(550, \sigma^2)$, 则该款新能源汽车的单次最大续航里程不低于 600 公里的概率为 ()
- A. 0.2 B. 0.3 C. 0.4 D. 0.8
10. 在 $\triangle ABC$ 中, 若内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , ABC 的平分线交 AC 于点 D , $BD=1$ 且 $b=2$, 则 $\triangle ABC$ 周长的最小值为 ()
- A. 7 B. $2\sqrt{2}$ C. $2+2\sqrt{2}$ D. 4
11. 某车间生产一种圆台形零件, 其下底面的直径为 4, 上底面的直径为 8, 已知 AB 为上底面的直径, 点 P 是上底面圆周上一点, 且 $AP=BP$, PC 是该圆台的一条母线, 且 $PC=2\sqrt{5}$, 则 PC 与平面 ABC 所成的角的正弦值为 ()
- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{5}$
12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{11}{16}(x+1), & -3 \leq x \leq k, \\ \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{11}{8}, & k < x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$ 的值域为 $[-\frac{11}{8}, 2]$, 则实数 k 的取值范围是 ()
- A. $[\frac{\sqrt{33}}{4}, \frac{3}{2}]$ B. $(\frac{\sqrt{33}}{4}, \frac{3}{2}]$ C. $[-3, \frac{\sqrt{33}}{4}]$ D. $(-3, \frac{\sqrt{33}}{4}]$

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知 $x > 0, y > 0$, 且 $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 4$, 则 xy 的最大值是_____.

14. 在 $(2x^3 + 1)\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^3$ 的展开式中 x^3 的系数为_____.

15. 已知函数 $f(x) = 2\sin x + \cos x$, 若 $\exists \theta \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(\theta)$, 则 $\tan 2\theta$ 的值为_____.

16. 已知实数 $a > 0$, 函数 $f(x) = e^x + a\cos x, g(x) = \sqrt{2}a\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 若方程 $f(x) = g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有且仅有4个实数根, 则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题:共70分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22、23题为选考题,考生根据要求作答.

17. (必考题:共10分)

17. (本小题满分10分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} (n \in \mathbf{N}^*)$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

(1) 证明:数列 $\{S_n + S_{n+1}\}$ 是等比数列,并求 S_n ;

(2) 设 $b_n = na_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分12分)

抖音(Tik Tok)是由今日头条推出的一款短视频分享APP,于2016年9月上线,是一个专注于年轻人音乐短视频创作分享的社区平台.抖音的出现是一把双刃剑,可以鼓励人们表达、沟通和记录,让每一个人看见并连接更大的世界,但同时也出现部分网民长时间沉迷刷抖音的现象,长时间刷抖音会影响用眼健康.为了解网民刷抖音的情况,某研究小组从抖音用户中随机抽取100人,对其平均每天刷抖音的时长进行统计,得到统计表如下:

平均每天刷抖音的时长	不大于1小时	大于1小时且小于3小时	不少于3小时
人数(男)	20	25	6
人数(女)	20	15	14

数学(理科)试题 第4页(共6页)

该研究小组按照用户平均每天刷抖音时长将沉迷刷抖音程度分为重度、中度、轻度.若某人平均每天刷抖音的时长不少于3小时,则称为“重度沉迷”;平均每天刷抖音的时长大于1小时且小于3小时,则称为“中度沉迷”;平均每天刷抖音的时长不大于1小时,则称为“轻度沉迷”.

(1)根据调查数据,填写下面列联表,并根据数据判断是否有95%的把握认为性别与是否为“重度沉迷”刷抖音有关系?

	非“重度沉迷”	“重度沉迷”	合计
人数(男)			
人数(女)			
合计			

(2)该研究小组为鼓励用户适度刷抖音,从这100名研究对象中按分层抽样方式随机抽取20位,分别给与“重度沉迷”“中度沉迷”和“轻度沉迷”的抖音用户100元、50元、150元的购书券奖励.现从这20位抖音用户中随机抽取两人,求这两人获得的购书券总和 X 的分布列和期望.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$.

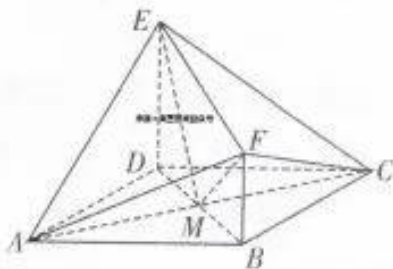
$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

19. (本小题满分12分)

如图,四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle ADC = 120^\circ$, $ED \perp$ 平面 $ABCD$, $FB \parallel ED$, $AB = ED$, 设 $FB = \lambda ED (0 < \lambda < 1)$, 连接 AC, BD 交于点 M , 连接 EM, FM .

(1)试问是否存在实数 λ , 使得 $EM \perp$ 平面 AFC ? 若存在, 请求出 λ 的值, 并写出求解过程; 若不存在, 请说明理由.

(2)当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 求平面 AEF 与平面 CEF 所成的锐二面角的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C_1: y^2 = 2px (p > 0)$ 与椭圆 $C_2: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 存在相同的焦点, 第一象限内曲线 C_1 上的一点 $M(t, s)$ 到其焦点的距离为 2, 直线 l 与 C_1 相交于 A, B 两点 (不与 M 点重合), 直线 MA, MB 关于直线 $x = t$ 对称.

(1) 求证: 直线 AB 的斜率为定值;

(2) 若椭圆 C_2 上存在不同的两点关于直线 AB 对称, 求原点到直线 AB 距离的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x(2\ln x - 1)$.

(1) 求曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若函数 $h(x) = f(x) + a(1 - \ln x) (a \in \mathbf{R})$ 有两个零点, 求实数 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第三、四题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-1: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \end{cases}$ (其中 t 为参数). 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2(1 + 3\sin^2\theta) = 1$.

(1) 求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 若射线 $\theta = \beta$ (其中 $\beta \in (0, \pi)$, 且 $\tan \beta = -\frac{1}{2}, \rho \geq 0$) 与曲线 C 在 x 轴上方交于点 M , 与直线 l 交于点 N , 求 $|MN|$.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲 来源: 高三答案公众号

已知 $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$, 且 $a + b = 2$.

(1) 证明: $a^2 + b^2 \geq 2$;

(2) 若 $b > 0, a \neq 0$, 求 $\frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{2(b+2)}$ 的最小值.

数学(理科)试题 第 6 页(共 6 页)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线