高三数学试题

2023.4

命题人：刘俊伟　宋涛　庞洪玲　高国军　赵兴玲　林静

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，第Ⅰ卷 1—3 页，第Ⅱ卷 3—4 页，共 150 分，测试时间 120 分钟.

注意事项：

选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，不能答在测试卷上.

准考证号＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿　学校＿＿＿＿

第Ⅰ卷　选择题（共 60 分）

一、选择题（本题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.）

1. 已知全集 $U=\{x\,|\,x\geqslant 0\}$，集合 $A=\{x\,|\,x(x-2)\leqslant 0\}$，则 $\complement_U A=$

A. $(2,+\infty)$　　B. $[2,+\infty)$

C. $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$

2. 设 a,b 为实数，$z=a+bi$，若 $\dfrac{1+2i}{a+bi}=1+i$，则复数 $\bar{z}$ 的虚部为　　$\bar{z}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

A. $\dfrac{1}{2}i$　　B. $-\dfrac{1}{2}i$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $-\dfrac{1}{2}$

3. “$m=-1$”是“直线 $l_1: mx+2y+1=0$ 与直线 $l_2: \dfrac{1}{2}x+my+\dfrac{1}{2}=0$ 平行”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

4. 已知一个装满水的圆台容器的上底半径为 5，下底半径为 1，高为 $8\sqrt{2}$，若将一个铁球放入该容器中，使得铁球完全没入水中，则可放入铁球的表面积的最大值为

A. 32π　　B. 36π　　C. 48π　　D. 50π

5. 设 F_1、F_2 分别为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点，O 为坐标原点，过左焦点 F_1 作直线 F_1P 与圆 $x^2+y^2=a^2$ 切于点 E，与双曲线右支交于点 P，且△OF_1P 为等腰三角形，则双曲线的离心率为

A. $\sqrt{5}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

6. 足球是一项大众喜爱的运动，为了解喜爱足球是否与性别有关，随机抽取了若干人进行调查，抽取女性人数是男性的 2 倍，男性喜爱足球的人数占男性人数的 $\dfrac{5}{6}$，女性喜爱足球

[illegible]人数占女性人数的$\frac{1}{2}$，若本次调查得出"在犯错误的概率不超过 0.005 的前提下认为[illegible]"的结论，则被调查者中男性至少有多少人（　　）
A. 10　　　　B. 11　　　　C. 12　　　　D. 13

$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

7. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x-\cos\omega x\ (\omega>0)$ 在区间$[-\frac{2\pi}{5},\frac{3\pi}{4}]$上单调递增，且在区间$[0,\pi]$上只取得一次最大值，则 ω 的取值范围是

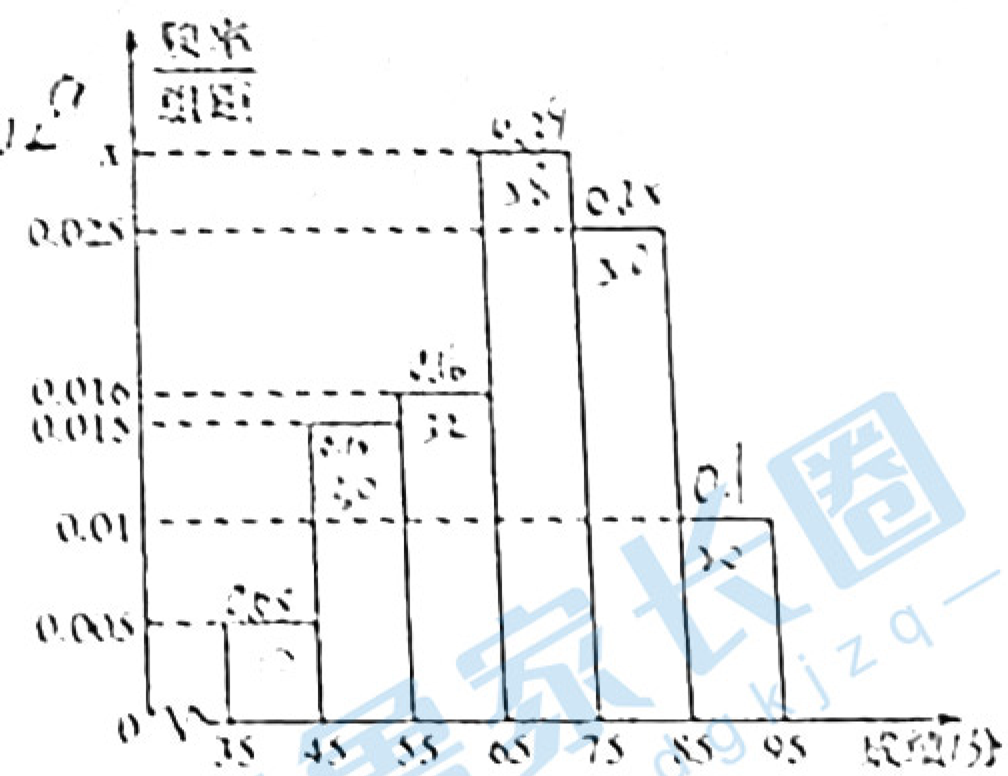
A. [illegible]$,\frac{8}{9}]$　　B. $[\frac{2}{3},\frac{5}{6}]$　　C. $[\frac{2}{3},\frac{8}{9}]$　　D. $[\frac{5}{6},\frac{8}{9}]$

8. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，满足 $f(x)>0$，$f(0)=1$，且 $f(x+2)=f(-x)e^{2x+2}$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>f(x)$，则

A. $f(-1)<e^{-1}$　　B. $f(\frac{1}{e})>e^{\frac{1}{e}}$　　C. $f(2)>e^2$　　D. $f(e)>e^e$

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

9. 在某次数学竞赛活动中，学生得分在[35，95]之间，满分 100 分，随机调查了 200 位学生的成绩，得到样本数据的频率分布直方图，则



A. 图中 x 的值为 0.029

B. 竞赛学生分数位于区间[45，75)的概率约为 0.35

C. 样本数据的 75% 分位数约为 79

D. 参赛学生的平均分数约为 68.4

10. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，P 是侧面 BB_1C_1C 上的一个动点（不包含四个顶点），则下列说法中正确的是

A. 三角形 AD_1P 的面积无最大值、无最小值

B. 存在点 P，满足 $DP\parallel$ 平面 AB_1D_1

C. 存在点 P，满足 $DP\perp BP$

D. BD_1 与 BP 所成角的正切值范围为$[\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}]$

11. 解析几何的创始人——法国数学家加斯帕尔·蒙日发现：与椭圆相切的两条垂直切线的交点的轨迹是以椭圆中心为圆心的圆，我们通常把这个圆称为该椭圆的蒙日圆. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. F_1，F_2 分别为椭圆的左、右焦点，直线 l 的方程为 $x+\sqrt{2}y-3=0$，M 为椭圆 C 的蒙日圆上一动点，MA，MB 分别与椭圆相切于 A，B 两点，O 为坐标原点，下列说法正确的是

A. 椭圆 C 的蒙日圆方程为 $x^2+y^2=3$

B. 记点 A 到直线 l 的距离为 d，则 $d-|AF_2|$ 的最小值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

C. 一矩形四条边与椭圆 C 相切，则此矩形面积最大值为 6

D. $\triangle AOB$ 的面积的最小值为 $\frac{2}{3}$，最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. 已知 x_1，x_2 分别是函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{x}$ 和 $g(x)=\ln x-\frac{1}{x}$ 的零点，则

A. $0<x_1<\frac{1}{2}$　　B. $\ln x_1+\ln x_2=0$　　C. $e^{x_1}\ln x_2=1$　　D. $\frac{13}{6}<x_1+x_2<\frac{5}{2}$

第Ⅱ卷　非选择题(共 90 分)

三、填空题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13. 已知向量 $a=(-2,2)$，$b=(1,m)$，若向量 $a+b$ 与 a 垂直，则向量 a 与 b 的夹角余弦值是______.

14. 若 $(3-x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_5x^5$，则 $|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_5|=$______.

15. 已知函数 $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x$，若存在三个不相等的实数 a，b，c，使得 $f(a)=f(b)=f(c)$ 成立，则 abc 的取值范围是______.

16. 设数列 $\{a_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列. 在 a_1 和 a_2 之间插入 1 个数 x_{11}，使 a_1，x_{11}，a_2 成等差数列；在 a_2 和 a_3 之间插入 2 个数 x_{21}，x_{22}，使 a_2，x_{21}，x_{22}，a_3 成等差数列；…；在 a_n 和 a_{n+1} 之间插入 n 个数 x_{n1}，x_{n2}，…，x_{nn}，使 a_n，x_{n1}，x_{n2}，…，x_{nn}，a_{n+1} 成等差数列. 则 $x_{22}=$______；令 $S_n=x_{11}+x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{n1}+x_{n2}+\cdots+x_{nn}$，则 $\frac{4}{3}S_n=$______.

(第一空 2 分，第二空 3 分)

四、解答题(本题共 6 小题，共 70 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 10 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，已知 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R=2\sqrt{2}$，且 $\tan B+\tan C=\frac{\sqrt{2}\sin A}{\cos C}$.

(1)求 B 和 b 的值；

(2)求 AC 边上高的最大值.

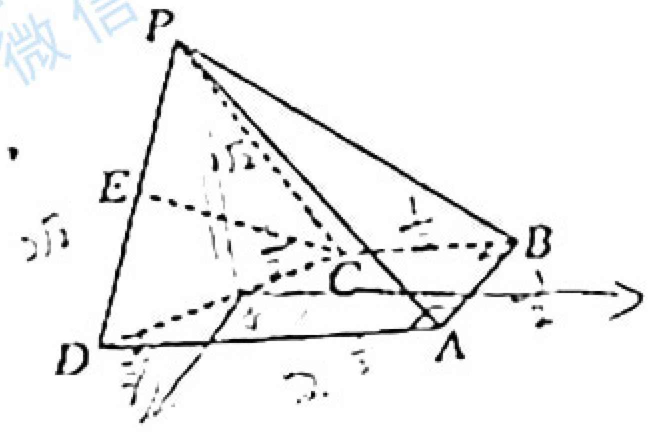
18.(本小题满分12分)

已知各项为正数的等比数列$\{a_n\}$满足$a_n\cdot a_{n+1}=16^n$，$n\in N^*$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_1=1,b_{n+1}=\begin{cases}a_n, & n\text{ 为奇数}\\ -b_n+n, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$，求数列$\{b_n\}$的前$2n$项和$S_{2n}$.

19.(本小题满分12分)



如图，在四棱锥P-$ABCD$中，平面$PDC\perp$平面$ABCD$，$PD=PC=2\sqrt{2}$，$CB=BA=\frac{1}{2}AD=2$，$AD//CB$，$\angle BAD=90°$，E为PD中点.

(1)求证：$CE//$面PAB；

(2)点Q在棱PA上，设$\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PA}(0<\lambda<1)$，若二面角$P$-$CD$-$Q$余弦值为$\frac{\sqrt{13}}{13}$，求$\lambda$.

20.(本小题满分12分)

某公司年末给职工发奖金，采用趣味抽奖的方式，在一个纸箱里放10个小球：其中2个红球、3个黄球和5个绿球，每个职工不放回地从中拿3次，每次拿1个球，每拿到一个红球得奖金1千元，每拿到一个黄球得奖金800元，每拿到一个绿球得奖金500元.

(1)已知某职工在三次中只有一次抽到黄球的条件下，至多有1次抽到红球的概率；

(2)设拿到红球的次数为X，求X的分布列并计算拿到的三个球中，红球个数比黄球个数多的概率.

21.(本小题满分12分)

设抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，点$D(p,0)$，过F的直线交C于M,N两点.当直线MD垂直于x轴时，$|MF|=3$.

(1)①求C的方程；②若M点在第一象限且$\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{1}{4}$，求$|MN|$；

(2)动直线l与抛物线C交于不同的两点A,B，P是抛物线上异于A,B的一点，记PA,PB的斜率分别为k_1,k_2，t为非零的常数.

从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立：

①P点坐标为$(t^2,2t)$；②$k_1+k_2=\frac{2}{t}$；③直线AB经过点$(-t^2,0)$.

(注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.)

22.(本小题满分12分)

已知函数$f(x)=(e^{x-1}-1)\ln x$.

(1)求$y=f(x)$在$x=1$处的切线方程；

(2)求$y=f(x)$的单调区间；

(3)当$x\in(1,+\infty)$时，$f(x)>k(x-1)^2$恒成立，求k的取值范围.