2022-2023 学年第二学期六校联合体期末联合调研

高一数学参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. D　2. C　3. B　4. D　5. A　6. A　7. C　8. B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. AB　10. BC　11. ABD　12. ACD

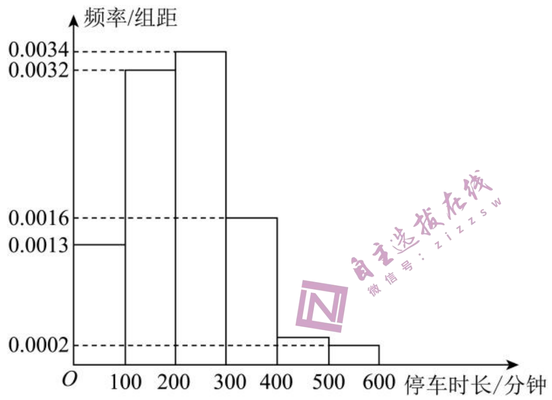
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　14. $\dfrac{3}{2}$　　15. $\dfrac{21}{5}$　　16. $\dfrac{7\sqrt{7}\pi}{6}$，$(20-8\sqrt{6})\pi$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

某商场为了制定合理的停车收费政策，需要了解顾客的停车时长（单位：分钟）．现随机抽取了该商场到访顾客的 100 辆车进行调查，将数据分成 6 组：$(0,100]$，$(100,200]$，$(200,300]$，$(300,400]$，$(400,500]$，$(500,600]$，并整理得到如下频率分布直方图：



(1)若某天该商场到访顾客的车辆数为 1000，根据频率分布直方图估计该天停车时长在区间$(400,600]$上的车辆数；

(2)为了吸引顾客，该商场准备给停车时长较短的车辆提供免费停车服务．若以 30 百分位数为标准，请你根据频率分布直方图，给出确定免费停车时长标准的建议(数据取整数)．

解：（1）根据频率分布直方图中所有频率和为 1，设$(400,500]$的频率为x，可列等式为

$(0.0002+0.0013+0.0016+0.0032+0.0034)\times 100+x=1\ \therefore x=0.03$

所以样本中停车时长在区间$(400,600]$上的频率为0.05，估计该天停车时长在区间$(400,600]$

上的车辆数是 50； ....5 分

（2）设免费停车时间长不超过 y 分钟，又因为 $(0,100]$ 的频率为 $0.13<30\%$，并且 $(0,200]$ 的频率为 $0.45>30\%$，所以 y 位于 $(100,200]$ 之间，则满足

$0.13+(y-100)\times 0.0032=0.3 \therefore y=153.1$

确定免费停车时长为不超过 153 分钟 ....5 分

18.（12 分）

已知 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2}),\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，且 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5},\sin\beta=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

(1)求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值；

(2)求 $2\alpha+\beta$ 的值.

解法 1(1)由题意 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5},\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5},\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{10},\sin\beta=\frac{7\sqrt{2}}{10}$

所以 $\tan\alpha=\frac{1}{2},\tan\beta=7$ ....2 分

所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+7}{1-\frac{1}{2}\times 7}=-3$ ....4 分

(2)由 α,β 为锐角，可得 $2\alpha+\beta\in(0,\frac{3\pi}{2})$ ....1 分

$$\tan(2\alpha+\beta)=\tan[(\alpha+\beta)+\alpha]=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\alpha}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}=\frac{-3+\frac{1}{2}}{1-(-3)\times\frac{1}{2}}=-1$$

所以 $2\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$ ....5 分

解法二：(1)由题意：$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5},\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5},\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{10},\sin\beta=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{10}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$$

所以 $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=-3$

(2)由α,β为锐角，可得$2\alpha+\beta\in(0,\dfrac{3\pi}{2})$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2}$$

$$\tan(2\alpha+\beta)=\tan[(\alpha+\beta)+\alpha]=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\alpha}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}=\frac{-3+\frac{1}{2}}{1-(-3)\times\frac{1}{2}}=-1$$

所以$2\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$

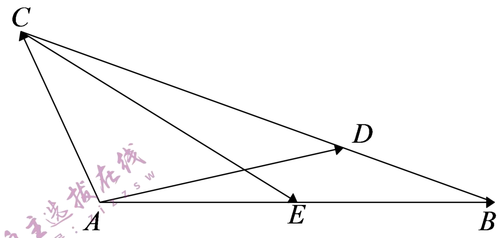
注：若用$\sin(2\alpha+\beta)$或$\cos(2\alpha+\beta)$来求解$2\alpha+\beta$应缩小角的范围

19．(12 分)

已知ΔABC中，$AB=2$，$AC=1$，$\angle BAC=120^{o}$，点D在边BC上且满足$CD=2BD$.

(1)用$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$表示$\overrightarrow{AD}$，并求$|\overrightarrow{AD}|$;

(2)若点E为边AB中点，求$\overrightarrow{CE}$与$\overrightarrow{AD}$夹角的余弦值.



解：(1) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, ...3 分

所以$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC})^2}=\sqrt{\dfrac{13}{9}}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$ ....3 分

（2）易知$\overrightarrow{CE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

所以$\left|\overrightarrow{CE}\right|=\left|\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{3}$ ....2 分

又$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CE}=(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC})\cdot(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\dfrac{3}{2}$ ....2 分

所以$\cos<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CE}>=\dfrac{3\sqrt{39}}{26}$ ....2 分

20.（12 分）

我校开展体能测试，甲、乙、丙三名男生准备在跳远测试中挑战 2.80 米的远度，已知每名男生有两次挑战机会，若第一跳成功，则等级为优秀，挑战结束；若第一跳失败，则再跳

一次，若第二跳成功，则等级也为优秀，若第二跳失败，则等级为良好，挑战结束．已知甲、乙、丙三名男生成功跳过 2.80 米的概率分别是$\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{3}$，且每名男生每跳相互独立．记“甲、乙、丙三名男生在这次跳远挑战中获得优秀” 分别为事件 A，B，C.

(1)求 $P(A)$、$P(B)$、$P(C)$;

(2)求甲、乙、丙三名男生在这次跳远挑战中恰有两人获得良好的概率.

解：（1）记“甲、乙、丙三名男生第 1 跳成功”分别为事件 A_1，B_1，C_1，记“甲、乙、丙三名男生第 2 跳成功”分别为事件 A_2，B_2，C_2.

记“甲、乙、丙三名男生在这次跳远挑战中获得“优秀”为事件 A，B，C.

$P(A)=P(A_1+\overline{A_1}A_2)\quad=P(A_1)+P(\overline{A_1}A_2)\quad=\frac{3}{4}+\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{15}{16}$， ……………………………2 分

$P(B)=P(B_1+\overline{B_1}B_2)\quad=P(B_1)+P(\overline{B_1}B_2)\quad=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$， ……………………………2 分

$P(C)=P(C_1+\overline{C_1}C_2)\quad=P(C_1)+P(\overline{C_1}C_2)\quad=\frac{1}{3}+\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$， ……………………………2 分

（2）记“甲、乙、丙三名男生在这次跳远挑战中恰有两人获得良好”为事件 D，

$P(D)=P(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C)=P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)$

$=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)$

$=\frac{15}{16}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{5}{9}\right)+\left(1-\frac{15}{16}\right)\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{5}{9}\right)+\left(1-\frac{15}{16}\right)\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{5}{9}$

$=\frac{77}{576}$. ……………………………6 分

答：(1)甲、乙、丙三名男生在这次跳远挑战中获得优秀的概率$\frac{15}{16}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{5}{9}$；

(2)甲、乙、丙三名男生在这次跳远挑战中恰有两人获得良好的概率$\frac{77}{576}$.

21.（12 分）

ΔABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $a\cos C+\sqrt{3}a\sin C=b+c$.

(1)求 A；

(2)若 ΔABC 为锐角三角形，且 $b=2$，求 ΔABC 面积的取值范围.

解：(1)由正弦定理可得：$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin B+\sin C$

所以 $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin(A+C)+\sin C=\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sin C$

所以 $\sqrt{3}\sin A\sin C=\cos A\sin C+\sin C$， ……………………………2 分

因为 $\sin C>0$，所以 $\sqrt{3}\sin A=\cos A+1$

所以$\sin(A-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$， ……………………………2 分

因为$A-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$， ……………………………1 分

所以$A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，即$A=\frac{\pi}{3}$ ……………………………1 分

（2）由题设及(1)知$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}c$.

由正弦定理得$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{2\sin(120°-B)}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\tan B}+1$. ……………………………2 分

由于$\triangle ABC$为锐角三角形，故$0°<B<90°$，$0°<C<90°$.

由(1)知$A+C=120°$，

所以$30°<B<90°$， ……………………………1 分

故$1<c<4$， ……………………………2 分

从而$\frac{\sqrt{3}}{2}<S_{\triangle ABC}<2\sqrt{3}$.

因此$\triangle ABC$面积的取值范围是$(\frac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3})$. ……………………………1 分

解法二：(1)同上

(2)因为$\triangle ABC$为锐角三角形且$A=\frac{\pi}{3}$，则$\begin{cases}b^2+c^2-a^2=bc\\a^2+b^2>c^2\\a^2+c^2>b^2\end{cases}$ 即$\begin{cases}4+c^2-a^2=2c\\a^2+4>c^2\\a^2+c^2>4\end{cases}$

解得$1<c<4$所以$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}c\in(\frac{\sqrt{3}}{2},2\sqrt{3})$

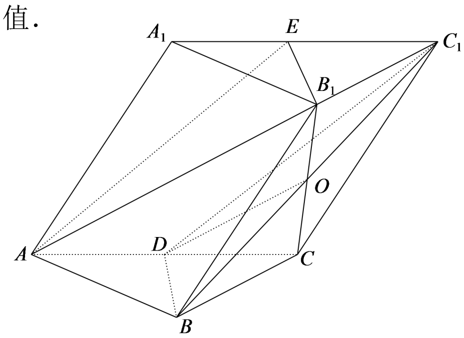
22.（12 分）

如图，已知斜三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，平面$ACC_1A_1\perp$平面$A_1B_1C_1$，所有侧棱与底面边长均为 2，$\angle AA_1C_1=120°$，D是边AC中点.

(1)求证：AB_1∥平面BDC_1；

(2)求异面直线BB_1与A_1C_1所成的角；

(3) F是边CC_1一点，且$CF=\lambda CC_1$，若$AB_1\perp A_1F$，求λ的值.



解：(1)如图，连接B_1C与BC_1交于点O，连DO，

在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，
四边形 BCC_1B_1 是平行四边形，
则 O 是 B_1C 的中点，又 D 是 AC 中点，
则 $AB_1 /\!/ DO$，......................................2 分
又 $AB_1 \not\subset$ 平面 BDC_1，$DO \subset$ 平面 BDC_1，
则 $AB_1 /\!/$ 平面 BDC_1 ....2 分

(2) 取 A_1C_1 的中点 E，连 AE，斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 底面 $\triangle A_1B_1C_1$ 边长均为 2，
则 $B_1E \perp A_1C_1$，
平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，平面 $ACC_1A_1 \cap$ 平面 $A_1B_1C_1 = A_1C_1$，$B_1E \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$
则 $B_1E \perp$ 平面 ACC_1A_1，
$\angle B_1AE$ 即为 AB_1 与平面 ACC_1A_1 所成角，......................................2 分
RT$\triangle B_1AE$ 中，$B_1E=\sqrt{3}$， $\tan\angle B_1AE=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，则 $AE=\sqrt{7}$，又 $AA_1=2$， $A_1E=2$
则在 $\triangle A_1AE$ 中，$\angle AA_1C_1=120°$，则 $\angle A_1AC_1=60°$ ....1 分
$AA_1 /\!/ BB_1$，$A_1C_1 /\!/ AC$，异面直线 BB_1 与 A_1C_1 所成的角为 $\angle A_1AC_1$，即为 $60°$ …1 分
(3) 由（2）知 $B_1E \perp$ 平面 ACC_1A_1，又 $A_1F \subset$ 平面 ACC_1A_1，则 $A_1F \perp B_1E$

又 $A_1F \perp AB_1$， $B_1E \cap AB_1 = B_1$， $B_1E, AB_1 \subset$ 平面 AB_1E，所以 $A_1F \subset$ 平面 AB_1E，

又 $AE \subset$ 平面 AB_1E，则 $A_1F \perp AE$ ....2 分

在菱形 ACC_1A_1 中，以 A 为坐标原点， AC 所在直线为 x 轴建系，

$\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CC_1}=\lambda(1,\sqrt{3})=(\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，又 $F(\lambda+2,\sqrt{3}\lambda)$，所以 $A_1F=(\lambda+1,\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3})$

又 $A_1F \perp AE$，则 $\overrightarrow{A_1F}\cdot\overrightarrow{AE}=0$，所以 $\lambda=\dfrac{1}{5}$ ....2 分

+