2022～2023 学年高三押题信息卷

理科数学(四)

注意事项:

1. 本卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答:先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内,写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x|y=\ln(x^2-x-2)\}$,$B=\{y|y=|x|\}$,则 $(\complement_U A)\cap B=$

A. $[0,2)$　　B. $(0,2)$　　C. $[-1,2]$　　D. $[0,2]$

2. 若复数 z 满足 $\frac{|4-3i|}{z}=3-2i$(i 为虚数单位),则在复平面内复数 z 对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$,且 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$,$|\boldsymbol{b}|=1$,则 $|3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$

A. $2\sqrt{11}$　　B. $2\sqrt{13}$　　C. 44　　D. 52

4. 已知等差数列$\{a_n\}$为递增数列,S_n 为其前 n 项和,$a_3+a_7=34$,$a_4\cdot a_6=280$,则 $S_{11}=$

A. 516　　B. 440　　C. 258　　D. 220

5. 木桶作为一种容器,在我国使用的历史已经达到了几千年,其形状可视为一个圆台.若某圆台形木桶上、下底面的半径分别为 20 cm,13 cm,母线长为 25 cm,木板厚度忽略不计,则该木桶的容积为

A. $\frac{14\ 225\pi}{3}\text{cm}^3$　　B. $4\ 552\pi\text{cm}^3$

C. $\frac{20\ 725\pi}{3}\text{cm}^3$　　D. $6\ 632\pi\text{cm}^3$

6. 某研究机构采访了“一带一路”沿线 20 国的青年,让他们用一个关键词表达对中国的印象,使用频率前 12 的关键词为:高铁、移动支付、网购、共享单车、一带一路、无人机、大熊猫、广场舞、中华美食、长城、京剧、美丽乡村.其中使用频率排前四的关键词“高铁、移动支付、网购、共享单车”也成为了他们眼中的“新四大发明”.从这 12 个关键词中选择 4 个不同的关键词,则至多包含 2 个“新四大发明”关键词的选法种数为

A. 491　　B. 462　　C. 392　　D. 279

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $C: y^2=8x$，P 为 x 轴正半轴上一点，线段 OP 的垂直平分线 l 交 C 于 A，B 两点，若 $\angle OAP=120°$，则四边形 $OAPB$ 的周长为

A. $64\sqrt{3}$　　B. 64　　C. $80\sqrt{3}$　　D. 80

8. 已知函数 $f(x)=\cos x+\cos 2x$，则下列说法正确的有

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. 函数 $f(x)$ 的最小值为 -2

C. 函数 $f(x)$ 的最大值为 2

D. 函数 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上恰有两个极值点

9. 已知函数 $f(x)=-x\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$，若 $f(2a-1)>f(3a+2)$，则 a 的取值范围为

A. $(-\infty,-3)$　　B. $(-3,+\infty)$

C. $\left(-3,-\frac{1}{5}\right)$　　D. $(-\infty,-3)\cup\left(-\frac{1}{5},+\infty\right)$

10. 已知点 $A(0,-4)$，点 $B(2,0)$，P 为圆 $O: x^2+y^2=4$ 上一动点，则 $\frac{|PB|}{|PA|}$ 的最大值是

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$　　B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

11. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{BC}+y\overrightarrow{BB_1}$（$x\in[0,1]$，$y\in[0,1]$），则下列说法错误的是

A. 当 $y=\frac{1}{2}$ 时，三棱锥 C_1-PDB_1 的体积为定值

B. 当 $x+y=1$ 时，$AP\perp BD_1$

C. 当 $x=y$ 时，$\triangle ACP$ 周长的最小值为 $2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

D. 当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时，三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 8π

12. 实数 a,b,c 分别满足 $a^{2\,023}=e$，$2\,023^b=2\,024$，$2\,022c=2\,023$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $a>b>c$　　B. $c>a>b$

C. $a>c>b$　　D. $b>a>c$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若随机变量 $X\sim B(3,p)$，$Y\sim N(3,\sigma^2)$，若 $P(X\geqslant 1)=0.657$，$P(1\leqslant Y<3)=p$，则 $P(Y>5)=$________.

14. 已知 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=$________.

15. 已知 $a>0,b>0,c>0$，且 $2b+c=1$，则 $\frac{3ac^2+a}{6bc}+\frac{6}{a+1}$ 的最小值为________.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1,F_2，过 F_1 的直线 l 与 C 的左、右两支分别交于 A,B 两点，点 T 在 x 轴上，满足 $\overrightarrow{BT}=4\overrightarrow{AF_2}$，且 BF_2 经过 $\triangle BF_1T$ 的内切圆圆心，则 C 的离心率为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $\sin 2B-\frac{c}{2a}\sin 2A=\sin A\cos C$.

(1)求角 B 的大小；

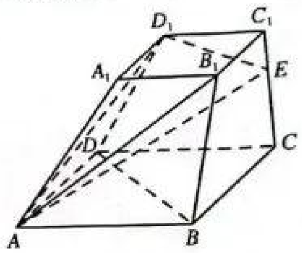
(2)点 D 是 AC 上的一点，$\angle ABD=\angle CBD$，且 $BD=1$，求△ABC 周长的最小值.

18.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，四边形 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$ 都是正方形，平面 $DCC_1D_1\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $BCC_1B_1\perp$ 平面 $ABCD$，$BC=4$，$CC_1=3$，$B_1C_1=2$，E 是棱 CC_1 上的一点，且 $CE=2C_1E$.

(1)求证：$CC_1\perp BD$；

(2)求直线 AB_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值.



19.（本小题满分 12 分）

有一种双人游戏，游戏规则如下：一个袋子中有大小和质地相同的 5 个小球，其中有 3 个白色小球，2 个红色小球，每次游戏双方从袋中轮流摸出 1 个小球，摸后不放回，摸到第 2 个红球的人获胜，同时结束该次游戏，并把摸出的球重新放回袋中，准备下一次游戏，且本次游戏中输掉的人在下一次游戏中先摸球. 小胡和小张准备玩这种游戏，约定玩 3 次，第一次游戏由小胡先摸球.

(1)在第一次游戏中，求在小胡第一轮摸到白球的情况下，小胡获胜的概率；

(2)记 3 次游戏中小胡获胜的次数为 X，求 X 的分布列和数学期望.

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(1)求 C 的方程；

(2)不过原点 O 的直线 l 与 C 交于不同的 P,Q 两点，且直线 OP,PQ,OQ 的斜率成等比数列. 在 C 上是否存在一点 M，使得四边形 OPMQ 为平行四边形？若存在，求出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=a^{x-1}-\log_a x-1(0<a<1)$.

(1)若 $a=\frac{1}{e}$，证明：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

(2)若 $f(x)$ 恰有 3 个零点，求 a 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=t+\frac{3}{t},\\ y=t-\frac{3}{t}\end{cases}$（$t$ 为参数）. 以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\frac{2\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$.

(1)求 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程；

(2)若点 P 是 C 上的一点，求点 P 到直线 l 的距离的最小值.

23.（本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x+1|-|2x-1|$.

(1)求不等式 $f(x)\leqslant-2$ 的解集；

(2)若不等式 $f(x)\leqslant x+3a^2-2a$ 对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

2022～2023 学年高三押题信息卷

理科数学(四)参考答案

1. D　由于 $A=\{x|y=\ln(x^2-x-2)\}=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$，所以 $\complement_U A=[-1,2]$，又 $B=\{y|y=|x|\}=[0,+\infty)$，所以 $(\complement_U A)\cap B=[0,2]$，故选 D.

2. A　由 $\frac{|4-3i|}{z}=3-2i$，得 $z=\frac{|4-3i|}{3-2i}=\frac{5(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{15}{13}+\frac{10}{13}i$，在复平面内复数 z 对应的点为 $\left(\frac{15}{13},\frac{10}{13}\right)$，位于第一象限. 故选 A.

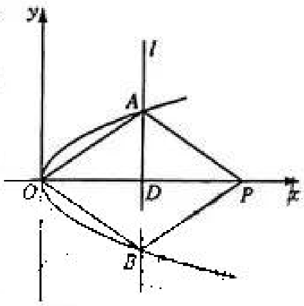
3. B　由题意 $|a|=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=2$，所以 $a\cdot b=2\times1\times\cos 60^\circ=1$，所以 $|3a+2b|^2=(3a+2b)^2=9a^2+12a\cdot b+4b^2=9\times4+12\times1+4\times1=52$，所以 $|3a+2b|=2\sqrt{13}$. 故选 B.

4. D　设数列的公差为 d，因为 $a_3+a_7=2a_5=34$，解得 $a_5=17$，又 $a_4\cdot a_6=280$，所以 $(17-d)(17+d)=280$，解得 $d=\pm3$，又数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，所以 $d=3$，所以 $a_6=17+3=20$，所以 $S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=11a_6=220$. 故选 D.

5. D　由题意可知，圆台形木桶的高为 $\sqrt{25^2-(20-13)^2}=24(\text{cm})$，所以该木桶的容积为 $\frac{1}{3}\pi\times24\times(20^2+13^2+20\times13)=6\ 632\pi(\text{cm}^3)$. 故选 D.

6. B　把 12 个关键词分为两组：高铁、移动支付、网购、共享单车一组，余下的为一组，从这 12 个关键词中选择 4 个不同的关键词，则至多包含 2 个“新四大发明”关键词的种数为 $C_4^2C_8^2+C_4^1C_8^3+C_8^4=462$ 种. 故选 B.

7. A　设 l 与 x 轴的交点为 D，设 $D(t,0)$，$t>0$，由题意知四边形 $OAPB$ 是菱形，且 $\angle OAP=120^\circ$，所以 $\angle AOD=30^\circ$，所以 $|AD|=\frac{\sqrt{3}}{3}t$，不妨设 $A\left(t,\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)$，则 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^2=8t$，解得 $t=24$，所以 $|OA|=\sqrt{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}t=16\sqrt{3}$，所以四边形 $OAPB$ 的周长为 $16\sqrt{3}\times4=64\sqrt{3}$. 故选 A.



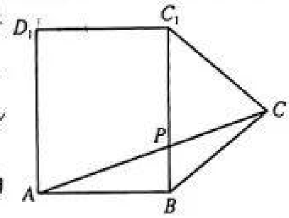
8. C　因为 $f(0)=2$，$f(\pi)=0$，所以 $f(0)\neq f(\pi)$，所以 π 不是函数 $f(x)$ 的周期，故 A 错误；$f(x)=\cos x+\cos 2x=2\cos^2x+\cos x-1=2\left(\cos x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$，所以当 $\cos x=-\frac{1}{4}$ 时，函数 $f(x)$ 有最小值 $-\frac{9}{8}$，故 B 错误；当 $\cos x=1$ 时，函数 $f(x)$ 有最大值 2，故 C 正确；当 $x\in(0,2\pi)$，$f'(x)=-\sin x-2\sin 2x=-\sin x(1+4\cos x)$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\pi$ 或 $\cos x=-\frac{1}{4}$，记 $\cos x=-\frac{1}{4}$ 在 $(0,2\pi)$ 上的两个实数根为 x_1,x_2，则 $x_1\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$x_2\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，所以当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_1,\pi)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(\pi,x_2)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_2,2\pi)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；所以 $f(x)$ 在 $x=\pi$ 处取得极大值，在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处取得极小值，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上有三个极值点，故 D 错误. 故选 C.

9. C　函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)=-x\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=x\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=x\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$，所以 $f(-x)=(-x)\ln(\sqrt{(-x)^2+1}-x)=-x\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数. 当 $x\geqslant0$ 时，$f'(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)\geqslant0$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增. 由 $f(2a-1)>f(3a+2)$，得 $|2a-1|>|3a+2|$，解得 $-3<a<-\frac{1}{5}$，所以 a 的取值范围为 $\left(-3,-\frac{1}{5}\right)$. 故选 C.

10. A　设 $P(x_0,y_0)$，则 $x_0^2+y_0^2=4$，所以 $|PA|^2=x_0^2+(y_0+4)^2=20+8y_0$，$|PB|^2=(x_0-2)^2+y_0^2=8-4x_0$，所以

$\frac{|PB|^2}{|PA|^2}=\frac{8-4x_0}{20+8y_0}=\frac{2-x_0}{5+2y_0}$，令$\frac{2-x_0}{5+2y_0}=m$，则 $x_0+2my_0+5m-2=0$，所以圆 $O:x^2+y^2=4$ 与直线 $x+2my+5m-2=0$ 有公共点，所以$\frac{|5m-2|}{\sqrt{1+4m^2}}\leqslant 2$，即 $9m^2-20m\leqslant 0$，解得 $0\leqslant m\leqslant\frac{20}{9}$，所以$\frac{|PB|^2}{|PA|^2}\in\left[0,\frac{20}{9}\right]$，所以$\left|\frac{PB}{PA}\right|\leqslant\frac{2\sqrt{5}}{3}$，即$\left|\frac{PB}{PA}\right|$的最大值是$\frac{2\sqrt{5}}{3}$. 故选 A.

11. C　取 BB_1 的中点 E，CC_1 的中点 F，当 $y=\frac{1}{2}$时，点 P 在线段 EF 上. 因为 E 是 BB_1 的中点，F 是 CC_1 的中点，所以 $EF /\!/ B_1C_1$，又 $EF\not\subset$平面 B_1C_1D，$B_1C_1\subset$平面 B_1C_1D，所以 $EF/\!/$平面 B_1C_1D，所以点 P 到平面 B_1C_1D 的距离为定值，又$\triangle B_1C_1D$ 的面积为定值，所以三棱锥 C_1-PDB_1 的体积为定值，故 A 正确；因为$\overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{BC}+y\overrightarrow{BB_1}$，$x+y=1$，所以$\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BB_1}=x\overrightarrow{BC}-x\overrightarrow{BB_1}$，即$\overrightarrow{B_1P}=x\overrightarrow{B_1C}$，又 $x\in[0,1]$，所以点 P 在线段 B_1C 上. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $AC\perp BD$，因为 $DD_1\perp$平面 $ABCD$，$AC\subset$平面 $ABCD$，所以 $DD_1\perp AC$，又 $DD_1\cap DB=D$，DD_1，$DB\subset$平面 BDD_1，所以 $AC\perp$平面 BDD_1，又 $BD_1\subset$平面 BDD_1，所以 $AC\perp BD_1$，同理可得 $AB_1\perp BD_1$，又 $AB_1\cap AC=A$，AB_1，$AC\subset$平面 ACB_1，所以 $BD_1\perp$平面 ACB_1，又 $AP\subset$平面 ACB_1，所以 $AP\perp BD_1$，故 B 正确；当 $x=y$ 时，$\overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{BC}+y\overrightarrow{BB_1}=x(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1})=x\overrightarrow{BC_1}$，$x\in[0,1]$，所以点 P 在线段 BC_1 上运动. $\triangle APC$ 的周长为 $AP+PC+AC$，AC 为定值，即 $AP+PC$ 最小时，$\triangle APC$ 的周长最小，如图，将平面 BCC_1 展成与平面 ABC_1D_1 同一平面，当点 A,P,C 共线时，此时 $AP+PC$ 最小，此时 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC}=2\sqrt{2+\sqrt{2}}$，所以$\triangle ACP$ 周长的最小值为 $2\sqrt{2+\sqrt{2}}+2\sqrt{2}$，故 C 错误；因为 $x=y=\frac{1}{2}$，$\overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{BC}+y\overrightarrow{BB_1}$，所以$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC_1}$，即点 P 为 BC_1 的中点，连接 AC，BD，记其交点为 O，取 BC 的中点为 G，连接 PG，OG，则 $OP=\sqrt{OG^2+PG^2}=\sqrt{2}$，又 $OA=OB=OC=\sqrt{2}$，所以点 O 为三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的球心，所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的半径为$\sqrt{2}$，所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 8π，故 D 正确. 故选 C.



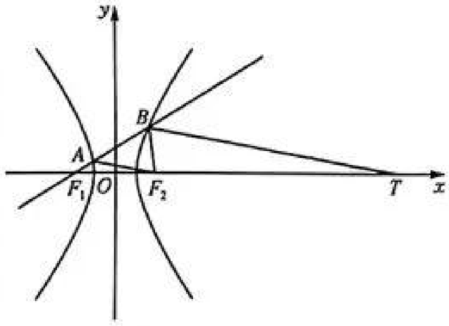
12. B　由已知得 $a=e^{\frac{1}{2\,023}}$，$b=\log_{2\,023}2\,024$，$c=\frac{2\,023}{2\,022}$，设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，所以 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x\in(e,+\infty)$时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$在$(e,+\infty)$上单调递减，因此 $f(2\,024)<f(2\,023)$，即$\frac{\ln 2\,023}{2\,023}>\frac{\ln 2\,024}{2\,024}$，所以$\frac{2\,024}{2\,023}>\frac{\ln 2\,024}{\ln 2\,023}=\log_{2\,023}2\,024=b$. 设 $h(x)=e^x-x-1$，所以 $h'(x)=e^x-1$，当 $x\in(0,+\infty)$时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)=e^x-x-1$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，因此 $h\left(\frac{1}{2\,023}\right)=e^{\frac{1}{2\,023}}-\frac{1}{2\,023}-1>h(0)=0$，所以 $e^{\frac{1}{2\,023}}>\frac{1}{2\,023}+1=\frac{2\,024}{2\,023}$，则 $a=e^{\frac{1}{2\,023}}>\frac{2\,024}{2\,023}$，所以 $a>b$；设 $g(x)=e^x(1-x)-1$，所以 $g'(x)=-xe^x$，当 $x\in(0,1)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，当 $x\in(0,1)$时，$g(x)<g(0)=0$，$e^x<\frac{1}{1-x}$恒成立；当 $x=\frac{1}{2\,023}$时，$a=e^{\frac{1}{2\,023}}<\frac{2\,023}{2\,022}=c$. 所以 $c>a>b$. 故选 B.

13. 0.2　因为 $P(X\geqslant 1)=0.657$，所以 $1-(1-p)^3=0.657$，即$(1-p)^3=0.343$，解得 $p=0.3$. 所以 $P(1\leqslant Y<3)=p=0.3$，则 $P(Y>5)=\frac{1-2P(1\leqslant Y<3)}{2}=\frac{1-2\times 0.3}{2}=0.2$.

14. $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{10}}{6}$　因为 $\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=1$，又 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}$或 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{2}{3}$. 因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right)$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}$，所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=-\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{10}}{6}$.

15. $4\sqrt{3}-2$　$\frac{3ac^2+a}{6bc}+\frac{6}{a+1}=\frac{a}{6}\cdot\frac{3c^2+1}{bc}+\frac{6}{a+1}$，因为 $a>0$，$b>0$，$c>0$，且 $2b+c=1$，所以$\frac{3c^2+1}{bc}=\frac{3c}{b}+\frac{(2b+c)^2}{bc}=\frac{4c}{b}+\frac{4b}{c}+4\geqslant 2\sqrt{\frac{4c}{b}\cdot\frac{4b}{c}}+4=12$，当且仅当$\frac{4c}{b}=\frac{4b}{c}$，即 $b=c=\frac{1}{3}$时等号成立，所以$\frac{3ac^2+a}{6bc}+\frac{6}{a+1}=\frac{a}{6}\cdot\frac{3c^2+1}{bc}+\frac{6}{a+1}\geqslant\frac{a}{6}\times 12+\frac{6}{a+1}=2(a+1)+\frac{6}{a+1}-2\geqslant 2\sqrt{2(a+1)\cdot\frac{6}{a+1}}-2=4\sqrt{3}-2$，当且仅当 $b=c=\frac{1}{3}$，$2(a+1)=\frac{6}{a+1}$，即 a

$=\sqrt{3}-1$ 时等号成立，所以$\frac{3ac^2+a}{6bc}+\frac{6}{a+1}$的最小值为$4\sqrt{3}-2$.



16. $\frac{\sqrt{33}}{3}$　因为$\overrightarrow{BT}=4\overrightarrow{AF_2}$，所以$AF_2\parallel BT$，$|BT|=4|AF_2|$，所以$\angle AF_2B=\angle TBF_2$，$|AB|=3|AF_1|$，因为$BF_2$经过$\triangle BF_1T$内切圆圆心，所以$BF_2$为$\angle F_1BT$的角平分线，所以$\angle F_1BF_2=\angle TBF_2$，所以$\angle ABF_2=\angle BF_2A$，所以$|AB|=|AF_2|$，又$2a=|AF_2|-|AF_1|=|AB|-|AF_1|=3|AF_1|-|AF_1|=2|AF_1|$，所以$|AF_1|=a$，$|AF_2|=3a$，又$2a=|BF_1|-|BF_2|=4a-|BF_2|$，所以$|BF_2|=2a$，在$\triangle ABF_2$中，由余弦定理得$\cos\angle ABF_2=\frac{|AB|^2+|BF_2|^2-|AF_2|^2}{2|AB|\cdot|BF_2|}=\frac{(3a)^2+(2a)^2-(3a)^2}{2\times3a\times2a}=\frac{1}{3}$. 在$\triangle BF_1F_2$中，由余弦定理得$\cos\angle ABF_2=\frac{|BF_1|^2+|BF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|BF_1|\cdot|BF_2|}=\frac{(4a)^2+(2a)^2-(2c)^2}{2\times4a\times2a}=\frac{1}{3}$，得$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{33}}{3}$，即$C$的离心率为$\frac{\sqrt{33}}{3}$.

17. 解：(1)因为$\sin 2B-\frac{c}{2a}\sin 2A=\sin A\cos C$，所以$a\sin 2B-\frac{c}{2}\sin 2A=a\sin A\cos C$，

由正弦定理得$\sin A\sin 2B-\frac{\sin C}{2}\sin 2A=\sin^2A\cos C$，………………………… 1分

所以$2\sin A\sin B\cos B-\sin C\sin A\cos A=\sin^2A\cos C$.

又$A\in(0,\pi)$，所以$\sin A\neq0$，所以$2\sin B\cos B=\sin C\cos A+\sin A\cos C$，

所以$2\sin B\cos B=\sin(A+C)$，所以$2\sin B\cos B=\sin(\pi-B)$，所以$2\sin B\cos B=\sin B$，………… 3分

由$B\in(0,\pi)$，所以$\sin B\neq0$，所以$\cos B=\frac{1}{2}$，又$B\in(0,\pi)$，所以$B=\frac{\pi}{3}$. ………………… 5分

(2)因为$\angle ABD=\angle CBD$，又$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，所以$\angle ABD=\angle CBD=\frac{\pi}{6}$.

因为$S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}=S_{\triangle ABC}$，所以$\frac{1}{2}\cdot c\cdot1\cdot\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot a\cdot1\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\cdot c\cdot a\cdot\sin\frac{\pi}{3}$，得$a+c=\sqrt{3}ac$，

………………………………………………………………………………………… 7分

所以$a+c=\sqrt{3}ac\leqslant\sqrt{3}\cdot\left(\frac{a+c}{2}\right)^2$，即$a+c\geqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$，当且仅当$a=c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$时等号成立. ………… 9分

所以$\triangle ABC$的周长

$l=a+c+b=a+c+\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos B}$

$=a+c+\sqrt{a^2+c^2-ac}=a+c+\sqrt{(a+c)^2-3ac}=a+c+\sqrt{(a+c)^2-\sqrt{3}(a+c)}$. ……………… 10分

令$a+c=t$，则$t\geqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$，又$l=t+\sqrt{t^2-\sqrt{3}t}$在$\left[\frac{4\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$上单调递增，

所以当$t=\frac{4\sqrt{3}}{3}$时，$l_{\min}=2\sqrt{3}$，即$\triangle ABC$周长的最小值为$2\sqrt{3}$. ………………………… 12分

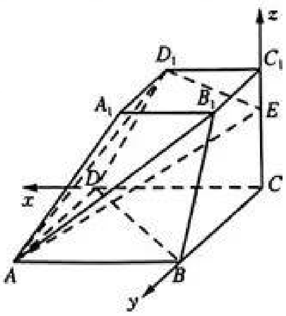
18. (1)证明：因为四边形$ABCD$是正方形，所以$BC\perp CD$，又平面$DCC_1D_1\perp$平面$ABCD$，平面$DCC_1D_1\cap$平面$ABCD=CD$，$BC\subset$平面$ABCD$，所以$BC\perp$平面DCC_1D_1，又$CC_1\subset$平面DCC_1D_1，所以$BC\perp CC_1$. ………… 2分

因为$BC\perp CD$，平面$BCC_1B_1\perp$平面$ABCD$，平面$BCC_1B_1\cap$平面$ABCD=BC$，$CD\subset$平面$ABCD$，所以$DC\perp$平面BCC_1B_1，又$CC_1\subset$平面BCC_1B_1，

所以$DC\perp CC_1$，……………………………………………………………… 4分

又$DC\cap BC=C$，$DC,BC\subset$平面$ABCD$，所以$CC_1\perp$平面$ABCD$，又$BD\subset$平面$ABCD$，所以$CC_1\perp BD$. ………………………………………………………………… 6分

(2)解：以C为原点，CD,CB,CC_1所在直线分别为x轴、y轴、z轴，建立空间直角坐标系，如图所示，所以$B_1(0,2,3)$，$A(4,4,0)$，$D_1(2,0,3)$，$E(0,0,2)$，



所以$\overrightarrow{AB_1}=(-4,-2,3)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-2,-4,3)$，$\overrightarrow{AE}=(-4,-4,2)$.

设平面 AD_1E 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2x-4y+3z=0,\\ -4x-4y+2z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，解得 $y=-2, z=-2$，

所以平面 AD_1E 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,-2,-2)$，………………………………………… 8 分

设直线 AB_1 与平面 AD_1E 所成角的大小为 θ，

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AB_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AB_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB_1}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{6}{\sqrt{16+4+9}\times\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{2\sqrt{29}}{29}$，

即直线 AB_1 与平面 AD_1E 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{29}}{29}$. ………………………………………… 12 分

19. 解：(1)记“小胡第一轮摸到白球”为事件 A，“小胡获胜”为事件 B.

所以 $P(A)=\dfrac{3}{5}$，$P(AB)=\dfrac{C_3^1A_2^2}{A_5^3}+\dfrac{C_3^1C_2^1A_2^2}{A_5^5}+\dfrac{A_3^3C_2^1}{A_5^5}+\dfrac{A_3^3A_2^2}{A_5^5}=\dfrac{2}{5}$，………………………… 2 分

所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{2}{3}$. ………………………………………………………… 4 分

(2)记“先摸球者获胜”为事件 C，则

$P(C)=\dfrac{C_3^1A_2^2}{A_5^3}+\dfrac{C_3^1C_2^1A_2^2}{A_5^5}+\dfrac{A_3^3A_2^2}{A_5^5}+\dfrac{C_2^1C_3^1}{A_5^2}+\dfrac{C_2^1A_3^3}{A_5^5}+\dfrac{C_2^1A_3^3}{A_5^5}=\dfrac{3}{5}$，………………………… 6 分

X 的所有可能取值为 0、1、2、3，

$P(X=0)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^3=\dfrac{8}{125}$，$P(X=1)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{48}{125}$，

$P(X=2)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{57}{125}$，

$P(X=3)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{12}{125}$.

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{57}{125}$	$\frac{12}{125}$

…………………………………………………………………………………… 10 分

所以 $E(X)=0\times\dfrac{8}{125}+1\times\dfrac{48}{125}+2\times\dfrac{57}{125}+3\times\dfrac{12}{125}=\dfrac{198}{125}$. ………………………… 12 分

20. 解：(1)由题意知 $\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{\frac{1}{2}}{b^2}=1,\\ \dfrac{\frac{1}{2}}{a^2}+\dfrac{\frac{3}{4}}{b^2}=1,\end{cases}$ ………………………………………… 2 分

解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2},\\ b=1,\end{cases}$ ………………………………………………………………… 3 分

所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………………………………………………… 4 分

(2)设直线 l 的方程为 $y=kx+m(k\neq0, m\neq0)$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

因为直线 OP,PQ,OQ 的斜率成等比数列，所以 $k^2=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}$. ………………………… 5 分

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 得 $(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，

所以 $\Delta=16k^2m^2-8(m^2-1)(2k^2+1)=8(2k^2-m^2+1)>0$，

$x_1+x_2=-\dfrac{4km}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{2(m^2-1)}{2k^2+1}$，………………………………………… 7 分

所以 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\dfrac{m^2-2k^2}{2k^2+1}$，

所以$\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=\frac{m^2-2k^2}{2(m^2-1)}=k^2$，得$k^2=\frac{1}{2}$. ………………………… 9分

存在点M，使得四边形$OPMQ$为平行四边形. 理由如下：

因为四边形$OPMQ$为平行四边形，则点$M(x_1+x_2,y_1+y_2)$，

又点M在C上，则$\frac{(x_1+x_2)^2}{2}+(y_1+y_2)^2=1$，

因为$(x_1+x_2)^2=\frac{16k^2m^2}{(2k^2+1)^2}=2m^2$，

$(y_1+y_2)^2=[k(x_1+x_2)+2m]^2=k^2(x_1+x_2)^2+4km(x_1+x_2)+4m^2=m^2$，

所以$m^2+m^2=1$，即$m^2=\frac{1}{2}$， ………………………… 10分

当$k^2=\frac{1}{2}$，$m^2=\frac{1}{2}$时，满足$\Delta=8(2k^2-m^2+1)>0$，

所以直线l的方程为$y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$或$y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$或$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$或$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$. ………………………… 12分

21. (1)证明：若$a=\frac{1}{e}$，则$f(x)=\left(\frac{1}{e}\right)^{x-1}-\log_{\frac{1}{e}}x-1=e^{-x+1}+\ln x-1$，

所以$f'(x)=-e^{-x+1}+\frac{1}{x}=\frac{-xe^{-x+1}+1}{x}$. ………………………… 1分

令$g(x)=-xe^{-x+1}+1$，所以$g'(x)=-e^{-x+1}+xe^{-x+1}=(x-1)e^{-x+1}$，当$0<x<1$时，$g'(x)<0$，当$x>1$时，$g'(x)>0$，所以$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增， ………………………… 3分

所以$g(x)\geqslant g(1)=0$，所以$f'(x)\geqslant 0$在$(0,+\infty)$上恒成立，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. ………………………… 4分

(2)解：由题意知$f'(x)=a^{x-1}\ln a-\frac{1}{x\ln a}=\frac{1}{x}\left(xa^{x-1}\ln a-\frac{1}{\ln a}\right)$， ………………………… 5分

令$\varphi(x)=xa^{x-1}\ln a-\frac{1}{\ln a}$，所以$\varphi'(x)=a^{x-1}(1+x\ln a)\ln a$，

令$\varphi'(x)=0$，解得$x=-\frac{1}{\ln a}$，又$0<a<1$，所以$\ln a<0$，即$-\frac{1}{\ln a}>0$

当$0<x<-\frac{1}{\ln a}$时，$\varphi'(x)<0$；当$x>-\frac{1}{\ln a}$时，$\varphi'(x)>0$，

所以$\varphi(x)$在$\left(0,-\frac{1}{\ln a}\right)$上单调递减，在$\left(-\frac{1}{\ln a},+\infty\right)$上单调递增，

所以$\varphi(x)_{\min}=\varphi\left(-\frac{1}{\ln a}\right)=-a^{-\frac{1}{\ln a}-1}-\frac{1}{\ln a}$. ………………………… 6分

若$-a^{-\frac{1}{\ln a}-1}-\frac{1}{\ln a}\geqslant 0$，即$\left(-\frac{1}{\ln a}-1\right)\ln a\leqslant\ln\left(-\frac{1}{\ln a}\right)$，

令$-\frac{1}{\ln a}=t$，所以$(t-1)\left(-\frac{1}{t}\right)\leqslant\ln t$，即$\ln t-\frac{1}{t}+1\geqslant 0$，令$h(x)=\ln x-\frac{1}{x}+1$，显然$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

由$h(t)=\ln t-\frac{1}{t}+1\geqslant 0=h(1)$，所以$t\geqslant 1$，所以$-\frac{1}{\ln a}\geqslant 1$，

解得$\frac{1}{e}\leqslant a<1$，此时$\varphi(x)_{\min}\geqslant 0$，所以$f'(x)\geqslant 0$，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

又$f(1)=0$，所以$f(x)$存在唯一的零点，不符合题意； ………………………… 8分

当$0<a<\frac{1}{e}$时，$\varphi(0)=-\frac{1}{\ln a}>0$，$\varphi(x)_{\min}<0$，$\varphi(3)=3a^2\ln a-\frac{1}{\ln a}=\frac{3a^2(\ln a)^2-1}{\ln a}$，

令$t(a)=3a^2(\ln a)^2-1$，$0<a<\frac{1}{e}$，

则$t'(a)=3[2a(\ln a)^2+a^2\cdot\frac{1}{a}\cdot 2\ln a]=6a\ln a(\ln a+1)$，

因为$0<a<\frac{1}{e}$，所以$\ln a<-1$，所以$t'(a)=6a\ln a(\ln a+1)>0$，

所以$t(a)=3a^2(\ln a)^2-1$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递增，

所以 $t(a)<t\left(\frac{1}{e}\right)=3\left(\frac{1}{e}\right)^2\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2-1=\frac{3}{e^2}-1<0$，

所以 $\varphi(3)=\frac{3a^2(\ln a)^2-1}{\ln a}>0$，所以 $\varphi(x)$ 即 $f'(x)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{\ln a}\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{\ln a},+\infty\right)$ 上各有 1 个零点 x_1,x_2，且 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递增，(x_1,x_2) 上单调递减，$(x_2,+\infty)$ 上单调递增，…………………… 9 分

又 $f'(1)=\ln a-\frac{1}{\ln a}<0$，所以 $x_1<1<x_2$，

当 $0<x<a^{\frac{1}{a}-1}$ 时，$f(x)<a^{-1}-\log_a x-1<a^{-1}-1-(a^{-1}-1)=0$；

当 $x>\frac{1}{a}$ 时，$f(x)>0-\log_a\frac{1}{a}-1=0$，又 $f(x_1)>f(1)=0$，$f(x_2)<f(1)=0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$，(x_1,x_2) 和 $(x_2,+\infty)$ 上各有 1 个零点，共 3 个零点，符合题意. …………………… 11 分

综上，a 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$. …………………… 12 分

22. 解：(1) 由 $\begin{cases}x=t+\frac{3}{t},\\ y=t-\frac{3}{t}\end{cases}$ 消去 t 得 $x^2-y^2=12$，即 C 的普通方程为 $x^2-y^2=12$. …………………… 3 分

因为直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\frac{2\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$，所以直线 l 的直角坐标方程为 $y=-\sqrt{3}x$. …………………… 5 分

(2) 设 $P\left(t+\frac{3}{t},t-\frac{3}{t}\right)$，则 P 到直线 l 的距离

$d=\frac{\left|\sqrt{3}\left(t+\frac{3}{t}\right)+t-\frac{3}{t}\right|}{2}=\frac{1}{2}\left|(\sqrt{3}+1)t+\frac{3}{t}(\sqrt{3}-1)\right|\geqslant\frac{1}{2}\times2\sqrt{|(\sqrt{3}+1)t|\cdot\left|\frac{3}{t}(\sqrt{3}-1)\right|}=\sqrt{6}$，

当且仅当 $|(\sqrt{3}+1)t|=\left|\frac{3}{t}(\sqrt{3}-1)\right|$，即 $t=\pm\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ 时等号成立，

所以点 P 到直线 l 的距离的最小值为 $\sqrt{6}$. …………………… 10 分

23. 解：(1) $f(x)=|x+1|-|2x-1|=\begin{cases}x-2,x<-1,\\ 3x,-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 2-x,x>\frac{1}{2},\end{cases}$ …………………… 1 分

当 $x<-1$ 时，由 $x-2\leqslant-2$，解得 $x\leqslant0$，所以 $x<-1$；…………………… 2 分

当 $-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，由 $3x\leqslant-2$，解得 $x\leqslant-\frac{2}{3}$，所以 $-1\leqslant x\leqslant-\frac{2}{3}$； …………………… 3 分

当 $x>\frac{1}{2}$ 时，由 $2-x\leqslant-2$，解得 $x\geqslant4$，所以 $x\geqslant4$. …………………… 4 分

综上，不等式 $f(x)\leqslant-2$ 的解集为 $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup[4,+\infty)$. …………………… 5 分

(2) 不等式 $f(x)\leqslant x+3a^2-2a$ 对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 恒成立，

等价于 $f(x)-x\leqslant3a^2-2a$ 对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 恒成立，

则 $3a^2-2a\geqslant[f(x)-x]_{\max}$. …………………… 7 分

令 $g(x)=f(x)-x=\begin{cases}-2,x<-1,\\ 2x,-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 2-2x,x>\frac{1}{2},\end{cases}$ 则 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=1$，…………………… 8 分

即 $3a^2-2a\geqslant1$，解得 $a\leqslant-\frac{1}{3}$ 或 $a\geqslant1$，即 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]\cup[1,+\infty)$. …………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。