卷·A10联盟高二年级（2021级）下学期6月学情调研考试

数学参考答案

一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	C	C	D	A	B	D

1. A　由题意得，$A=\{x|x^2-10x+16<0\}=\{x|2<x<8\}$，$\therefore A\cup B=\{x|x>2\}$. 故选A.

2. B　设切点的横坐标为x，则$y'=2x-\dfrac{1}{x}=-1$，则$x=\dfrac{1}{2}\left(x=-1舍去\right)$. 故选B.

3. C　由题意得，$\dfrac{1}{3}\left(9\pi+18^2\pi+54\pi\right)\cdot h=1935\sqrt{3}\pi$，解得$h=15\sqrt{3}$. 故选C.

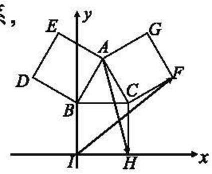
4. C　由题意得，$z=\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)\right]^4=\dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)=\dfrac{-\cos\dfrac{2\pi}{3}}{4}-\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{3}}{4}\mathrm{i}=\dfrac{1}{8}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}\mathrm{i}$，

故所求虚部为$-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. 故选C.

5. D　若“$l//\beta$”，则“l,m无交点”，反之不成立；选项A是充分不必要条件；选项B，C是既不充分也不必要条件. 故选D.

6. A　易知函数$f(x)$为奇函数，图象关于原点中心对称，排除C；当x从正方向趋于0时，$f(x)<0$，排除B；令$f(x)=0$，可知该方程有5个解，排除D. 故选A.

7. B　以I为原点，IH所在直线为x轴，IB所在直线为y轴建立平面直角坐标系，



则$I(0,0)$，$A\left(1,2+\sqrt{3}\right)$，$H(2,0)$，$F\left(2+\sqrt{3},3\right)$，

则$\overrightarrow{AH}=\left(1,-2-\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{IF}=\left(2+\sqrt{3},3\right)$，

则$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{IF}=-4-2\sqrt{3}$. 故选B.

8. D　由题意得，$a=\sum\limits_{i=30001}^{40000}\dfrac{1}{i}-\dfrac{4}{3}=\sum\limits_{i=1}^{40000}\dfrac{1}{i}-\sum\limits_{i=1}^{30000}\dfrac{1}{i}-\dfrac{4}{3}=\ln\dfrac{4}{3}-\dfrac{4}{3}$，同理可得，$b=\ln\dfrac{6}{5}-\dfrac{6}{5}$，$c=\ln\dfrac{9}{7}-\dfrac{9}{7}$；

令$f(x)=\ln x-x$，则$f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$，故当$x>1$时，$f'(x)<0$，即函数$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，而$\dfrac{4}{3}>\dfrac{9}{7}>\dfrac{6}{5}$，$\therefore b>c>a$. 故选D.

二、选择题（本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.）

题号	9	10	11	12
答案	BC	AD	ACD	BC

9. BC　由题意得，$g(x)=2\sin\left[\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{\pi}{4}\right]=2\sin\left(\dfrac{3}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，则$T=\dfrac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\dfrac{4\pi}{3}$，故A错误；

$g(\pi)=2\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)=-2\sin\dfrac{\pi}{4}=-\sqrt{2}$，故B正确；$\because g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$，$\therefore x=\dfrac{\pi}{6}$是$g(x)$图象的一条对称轴，故C正确；$\because x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},0\right]$，$\therefore\dfrac{3}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$，$\therefore g(x)$在

$\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$上单调递增，故D错误. 故选BC.

10. AD　由题意得，所求平均数为$\frac{160\times600+170\times400}{1000}=164$，故A正确，B错误；$s^2=\frac{1}{1000}\left\{600\times\left[100+(160-164)^2\right]+400\times\left[200+(170-164)^2\right]\right\}=\frac{116\times600+236\times400}{1000}=164$，故D正确，C错误. 故选AD.

11. ACD　由题意得，$p=4$，则C的准线为$x=-2$，故A正确；$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_Mx_N+y_My_N=\frac{p^2}{4}-p^2=-\frac{3}{4}p^2<0$，故B错误；$|MN|=\frac{2p}{\sin^2\theta}=\frac{8}{\sin^2\theta}\geqslant8$，故C正确；

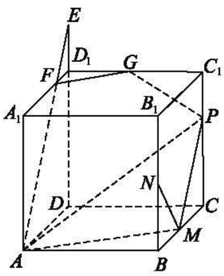
$\because\frac{1}{|MF|}+\frac{1}{|NF|}=\frac{2}{p}=\frac{1}{2}$，$\therefore|MF||NF|=2(|MF|+|NF|)$，故D正确. 故选ACD.

12. BC　若$MN\perp$平面AMP，则$MN\perp AM$，即$\angle NMA=90°$，而$AN=AM$，

则$\angle NMA=\angle ANM=90°$，显然不成立，故A错误；

当$\lambda=\frac{1}{2}$时，$AN\,//\,PD$，故B正确；作出图形如图所示，

延长DD_1至E，使得$D_1E=PC_1$，连接AE交A_1D_1于点F，取线段C_1D_1的中点G，连接FG，PG，则五边形$AMPGF$为所求截面图形，故C正确；连接DP，则$\angle PAD$即为异面直线AP与BC所成角，设正方体的棱长为2，则在$\mathrm{Rt}\triangle ADP$中，$AD=2$，$DP=\sqrt5$，$AP=3$，$\therefore\cos\angle PAD=\frac{2}{3}$，故D错误. 故选BC.



三、填空题（本题共4小题，每小题5分，共20分.）

13. $\frac{25}{4}$

由题意得，各份大小构成等差数列$\{a_n\}$，且$n=10$，$d=-\frac{5}{6}$，$S_{10}=100$，

$\therefore10a_{10}+\frac{10\times9}{2}\times\frac{5}{6}=100$，解得$a_{10}=\frac{25}{4}$.

14. 1（2,3也可）

由题意得，圆$x^2+y^2=1$与圆$C:(x-3)^2+(y-4)^2=r^2+25$有公共点，

$\therefore\sqrt{r^2+25}-1\leqslant\sqrt{3^2+4^2}\leqslant\sqrt{r^2+25}+1$，$\therefore\begin{cases}\sqrt{r^2+25}\geqslant4\\\sqrt{r^2+25}\leqslant6\\r>0\end{cases}$，解得$0<r\leqslant\sqrt{11}$，故$r=1,2,3$均可.

15. 1680　672

不同的坐法有$\mathrm{A}_8^4=1680$种；若其他两个人在同一排，则不同的坐法有$\mathrm{A}_2^1\left(\mathrm{A}_4^2\mathrm{A}_4^2\right)=288$种；若其他两个人不在同一排，则不同的坐法有$\mathrm{A}_2^1\mathrm{A}_2^1\left(\mathrm{A}_4^3\mathrm{A}_4^1\right)=384$种，故所有不同的坐法有$288+384=672$种.

16. $\sqrt3-1$

设右焦点为F'，连接AF'，由$\angle OAF=\angle OFA=\frac{\pi}{6}$，知$|OA|=\frac{1}{2}|FF'|$，易得$\angle FAF'=\frac{\pi}{2}$.

在$\mathrm{Rt}\triangle AFF'$中，$|AF|=2c\cdot\cos\angle AFO=2c\cdot\frac{\sqrt3}{2}=\sqrt3c$，$|AF'|=2c\cdot\sin\angle AFO=2c\cdot\frac{1}{2}=c$.

由椭圆的定义可得，$|AF|+|AF'|=2a$，$\therefore 2a=\left(\sqrt{3}+1\right)c$，故离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$.

四、解答题（本题共 6 小题，第 17 题 10 分，第 18~22 题每题 12 分，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 10 分）

（1）由正弦定理得 $2\sin B\cos C=2\sin A+\sin C$，…………………（1 分）

又 $\sin A=\sin\left(B+C\right)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，…………………（2 分）

代入上式可得 $2\cos B\sin C+\sin C=0$，…………………（3 分）

又 $C\in\left(0,\pi\right)$，$\therefore \sin C\neq 0$，$\therefore \cos B=-\dfrac{1}{2}$，…………………（4 分）

又 $B\in\left(0,\pi\right)$，$\therefore B=\dfrac{2\pi}{3}$. …………………（5 分）

（2）由题意得，$\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$，$\overrightarrow{BD}^2=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2\right)$，

即 $4=\dfrac{1}{4}\left(c^2+2ac\cos\dfrac{2\pi}{3}+a^2\right)$，整理得 $a^2+c^2-ac=16$. …………………（7 分）

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\dfrac{2\pi}{3}$，即 $a^2+c^2+ac=48$，…………………（8 分）

联立 $\begin{cases}a^2+c^2-ac=16\\a^2+c^2+ac=48\end{cases}$，解得 $ac=16$，…………………（9 分）

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\times16\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$. …………………（10 分）

18.（本小题满分 12 分）

（1）由点 $\left(a_{n+1},S_n\right)$ 在直线 $y=x-1$，得 $S_n=a_{n+1}-1$. …………………（1 分）

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=a_2-1$，即 $a_2=2$，…………………（2 分）

当 $n\geqslant 2$ 时，由 $S_n=a_{n+1}-1$ 得 $S_{n-1}=a_n-1$，…………………（3 分）

两式相减得 $a_n=a_{n+1}-a_n$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$. …………………（4 分）

又 $\dfrac{a_2}{a_1}=2$，$\therefore$ 数列 $\left\{a_n\right\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，$\therefore a_n=2^{n-1}$. …………………（6 分）

（2）由（1）知，$a_n=2^{n-1}$，$\therefore b_n=\begin{cases}2^{\frac{n}{2}-1}, n\text{为偶数}\\n, n\text{为奇数}\end{cases}$，…………………（7 分）

$\therefore T_{20}=\left(b_1+b_3+\cdots+b_{19}\right)+\left(b_2+b_4+\cdots+b_{20}\right)$

$=\left(1+3+\cdots+19\right)+\left(a_1+a_2+\cdots+a_{10}\right)$

$=\left(1+3+\cdots+19\right)+\left(1+2+\cdots+2^9\right)=\dfrac{10\times\left(1+19\right)}{2}+\dfrac{\left(1-2^{10}\right)}{1-2}=1123$. …………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

（1）由题意得，$\left(0.02\times2+0.03+0.05+0.06+a+0.18\right)\times2=1$，解得 $a=0.14$；………（2 分）

所求质量指标的平均值为 $2\times0.04+4\times0.12+6\times0.28+8\times0.36+10\times0.1+12\times0.06+14\times0.04=7.4$；
…………………（4 分）

（2）由题意得，$X\sim B\left(4,\dfrac{2}{5}\right)$，则 $P\left(X=0\right)=C_4^0\left(\dfrac{3}{5}\right)^4=\dfrac{81}{625}$，…………………（6 分）

$P\left(X=1\right)=C_4^1\left(\dfrac{3}{5}\right)^3\left(\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{216}{625}$，$P\left(X=2\right)=C_4^2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\left(\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{216}{625}$，…………………（8 分）

$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{96}{625}$，$P(X=4)=C_4^4\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}$；………………（10分）

故 X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{81}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$

$\therefore E(X)=4\times\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$. ………………（12分）

20.（本小题满分12分）

（1）证明：设点 M 为 BC 的中点，连接 SM，MA. 不妨设 $BC=2$，则 $BM=1$，

$\because \angle CBA=\frac{1}{2}\angle BAD=\frac{4}{3}\angle SBC=60°$，$\therefore \angle SBC=45°$，$MC\,//\,AD$.

在 $\triangle SBM$ 中，由余弦定理得，$SM=1$，$\therefore SM\perp BC$. ………………（1分）

在 $\triangle ABM$ 中，由余弦定理得，$MA=\sqrt{3}$，易得 $MA\perp BC$，………………（2分）

又 $MC\,//\,AD$，且 $MC=AD=1$，$\therefore$ 四边形 $AMCD$ 为矩形，$\therefore AM\,//\,CD$，………………（3分）

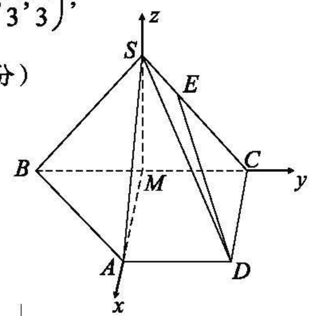
在 $\triangle SAM$ 中，$\because SA^2=AM^2+SM^2$，$\therefore SM\perp MA$，即 $SM\perp CD$. ………………（4分）

又 $BC\perp CD$，$SM\cap BC=M$，$\therefore CD\perp$ 平面 SBC. ………………（5分）

而 $CD\subset$ 平面 SCD，$\therefore$ 平面 $SBC\perp$ 平面 SCD. ………………（6分）

（2）以 M 为坐标原点，分别以 MA，MC，MS 为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $Mxyz$.

由题意得，$A(\sqrt{3},0,0)$，$S(0,0,1)$，$B(0,-1,0)$，$D(\sqrt{3},1,0)$，$E\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，



$\therefore \overrightarrow{SA}=(\sqrt{3},0,-1)$，$\overrightarrow{SB}=(0,-1,-1)$，$\overrightarrow{DE}=\left(-\sqrt{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$. ……（8分）

设平面 SAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{SA}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{SB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\sqrt{3}x-z=0\\ -y-z=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则 $y=-\sqrt{3}$，$z=\sqrt{3}$，$\therefore \boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$. ………（10分）

$\therefore$ 直线 DE 与平面 SAB 所成角的正弦值 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{DE},\boldsymbol{n}>\right|=\left|\frac{\overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{DE}|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{\sqrt{15}}{35}$. ……（12分）

21.（本小题满分12分）

（1）由直线 $l:mx+y-2m-3=0$ 知，$l:m(x-2)+(y-3)=0$，得定点 $A(2,3)$. ………（1分）

则 $\begin{cases}\frac{4}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1\\ \frac{b}{a}=\sqrt{3}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a^2=1\\ b^2=3\end{cases}$，故 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$. ………………（4分）

（2）由（1）知，$A(2,3)$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}x^2-\frac{y^2}{3}=1\\ y=kx+1\end{cases}$，整理得 $(3-k^2)x^2-2kx-4=0$，

则$3-k^2\neq 0$，且$\Delta=48-12k^2>0$，$\therefore k^2<4$且$k^2\neq 3$，………………（5分）

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{2k}{3-k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-4}{3-k^2}$，………………（6分）

$$\therefore k_{AM}+k_{AN}=\frac{y_1-3}{x_1-2}+\frac{y_2-3}{x_2-2}=\frac{kx_1-2}{x_1-2}+\frac{kx_2-2}{x_2-2}=2k+(2k-2)\left(\frac{1}{x_1-2}+\frac{1}{x_2-2}\right)$$

$$=2k+\frac{(2k-2)(x_1+x_2-4)}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}=2k+\frac{(2k-2)\left(\dfrac{2k}{3-k^2}-4\right)}{-\dfrac{4}{3-k^2}-2\cdot\dfrac{2k}{3-k^2}+4}$$

$$=2k+\frac{(2k-2)\times 2(2k-3)(k+2)}{-4(k-1)(k+2)}=3.$$………………（12分）

22.（本小题满分12分）

（1）$f'(x)=e^{1-x}(1-x)+x^2-1=(1-x)\left(e^{1-x}-x-1\right)$，………………（1分）

$\because x\in(-\infty,0]$，$\therefore 1-x>0$，$e^{1-x}>1$，$\therefore e^{1-x}-x-1>0$，………………（2分）

$\therefore$当$x\in(-\infty,0]$时，$f'(x)>0$，………………（3分）

$\therefore$函数$f(x)$在$(-\infty,0]$上单调递增．………………（4分）

（2）由题意得，$xe^{1-x}-x\ln x+ax^3-a-x\geqslant 0$，$x\geqslant 1$，则$e^{1-x}-\ln x+ax^2-\dfrac{a}{x}-1\geqslant 0$．…………（5分）

令$F(x)=e^{1-x}-\ln x+ax^2-\dfrac{a}{x}-1\ (x\geqslant 1)$，则$F'(x)=-e^{1-x}-\dfrac{1}{x}+2ax+\dfrac{a}{x^2}$，

$\therefore F(1)=0$，$F'(1)=3a-2$．………………（6分）

（ⅰ）当$3a-2\geqslant 0$，即$a\geqslant\dfrac{2}{3}$时，$F''(x)=e^{1-x}+\dfrac{1}{x^2}+2a\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)>0$，

$\therefore F'(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，则$F'(x)\geqslant F'(1)\geqslant 0$，………………（7分）

$\therefore F(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，$\therefore F(x)\geqslant F(1)=0$，$\therefore a\geqslant\dfrac{2}{3}$符合题意；………………（8分）

（ⅱ）当$3a-2<0$，即$a<\dfrac{2}{3}$时，

①当$a\leqslant 0$时，$F'(x)=-e^{1-x}-\dfrac{1}{x}+2ax+\dfrac{a}{x^2}=-\left(e^{1-x}+\dfrac{1}{x}\right)+a\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)<0$，……（9分）

故$F(x)$在区间$[1,+\infty)$上单调递减，$\therefore F(x)\leqslant F(1)=0$，这与题设矛盾；………………（10分）

②当$0<a<\dfrac{2}{3}$时，有$F'(1)<0$，又$x\to+\infty$，$F'(x)\to+\infty$，

$F''(x)=e^{1-x}+\dfrac{1}{x^2}+2a\left(1-\dfrac{1}{x^3}\right)>0$，$\therefore F'(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，

由零点存在性定理，知$F'(x)$在$(1,+\infty)$上存在唯一零点x_0，………………（11分）

$\therefore$当$x\in(1,x_0)$时，$F'(x)<0$，此时$F(x)<F(1)=0$，故与题设矛盾．

综上所述，a的取值范围是$\left[\dfrac{2}{3},+\infty\right)$．………………（12分）

以上各解答题如有不同解法并且正确，请按相应步骤给分．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线