成都石室中学高2023届高考适应性考试(一)
理科数学参考答案

双向细目表

题型	题号	分值	内容板块	具体知识点	考查层次		
					了解	掌握	应用
选择题	1	5	集合	集合的运算		√	
选择题	2	5	复数	复数的运算		√	
选择题	3	5	统计	折线图分析	√		
选择题	4	5	二项式	二项式系数性质		√	
选择题	5	5	三角函数	函数性质		√	
选择题	6	5	框图	循环结构		√	
选择题	7	5	三角函数	图象性质		√	
选择题	8	5	不等式	基本不等式		√	
选择题	9	5	解析几何	双曲线		√	
选择题	10	5	函数与导数	用单调性比较大小		√	
选择题	11	5	解析几何	椭圆		√	
选择题	12	5	解析几何	抛物线		√	
填空题	13	5	概率统计	等可能事件的概率		√	
填空题	14	5	解三角形	正、余弦定理		√	
填空题	15	5	立体几何	与球有关的组合体		√	
填空题	16	5	导数	同构		√	
解答题	17	12	概率统计	直方图,随机变量		√	
解答题	18	12	数列	等比与求和		√	
解答题	19	12	立体几何	四点共面,二面角		√	
解答题	20	12	解析几何	椭圆综合			√
解答题	21	12	函数与导数	单调性与恒成立问题			√
解答题	22	10	选考	极坐标		√	
解答题	23	10	选考	不等式		√	

答案及解析

1. D 【解析】因为 $A=\{x\mid \log_{0.5}(x-1)>0\}=\{x\mid 1<x<2\}$,$B=\{x\mid 2^x<4\}=\{x\mid x<2\}$,所以 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$,$A\cap B=\{x\mid 1<x<2\}=A$,$A\cup B=\{x\mid x<2\}=B$. 故选 D.

2. C 【解析】因为 $z=\frac{5i}{2-i}=\frac{5i(2+i)}{(2-i)(2+i)}=-1+2i$，所以 $\bar{z}=-1-2i$，其对应点的坐标为 $(-1,-2)$，在第三象限. 故选 C.

3. C 【解析】在这 12 个月中，我国居民消费价格月度同比数据由小到大依次为 0.9%，0.9%，1.5%，1.6%，1.8%，2.1%，2.1%，2.1%，2.5%，2.5%，2.7%，2.8%，中位数为 $\frac{2.1\%+2.1\%}{2}=2.1\%$，平均数为 $\frac{1}{12}\times(0.9\%+0.9\%+1.5\%+1.6\%+1.8\%+2.1\%+2.1\%+2.1\%+2.5\%+2.5\%+2.7\%+2.8\%)\approx1.958\%$. 由数据可知，我国居民消费价格月度环比的数据中，有 6 个月的数据为正数，3 个月的数据为 0.0%，3 个月的数据为负数，所以月度环比数据为正数的个数比月度环比数据为负数的个数多 3，且众数为 0.0%. 因此，选项 A，B，D 均正确，C 错误. 故选 C.

4. A 【解析】$(1+x)^n$ 的展开式第 $r+1$ 项为 $T_{r+1}=C_n^r x^r$. 因为 $a_2=a_3$，所以 $C_n^2=C_n^3$，所以 $n=2+3=5$. 故选 A.

5. D 【解析】函数 $f(x)=\sin 2x\cdot\tan x$ 的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$，且 $f(x)=\sin 2x\cdot\tan x=2\sin x\cos x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=2\sin^2 x$，则 $f(-x)=2\sin^2(-x)=2\sin^2 x=f(x)$，即函数 $f(x)$ 为偶函数，故选项 A，C 均错误；因为 $f(x)=2\sin^2 x=1-\cos 2x$，$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，则 $\cos 2x\in(-1,1]$，所以 $f(x)=1-\cos 2x\in[0,2)$，所以函数 $f(x)$ 的最小值为 0，无最大值，故选项 B 错误，D 正确. 故选 D.

6. C 【解析】第一次循环，$\frac{1}{2}s=\frac{5}{2}\in\mathbf{Z}$ 不成立，则 $s=3\times5+1=16$，$i=0+1=1$，$s=1$ 不成立；

第二次循环，$\frac{1}{2}s=8\in\mathbf{Z}$ 成立，则 $s=\frac{1}{2}\times16=8$，$i=1+1=2$，$s=1$ 不成立；

第三次循环，$\frac{1}{2}s=4\in\mathbf{Z}$ 成立，则 $s=\frac{1}{2}\times8=4$，$i=2+1=3$，$s=1$ 不成立；

第四次循环，$\frac{1}{2}s=2\in\mathbf{Z}$ 成立，则 $s=\frac{1}{2}\times4=2$，$i=3+1=4$，$s=1$ 不成立；

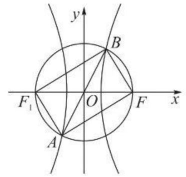
第五次循环，$\frac{1}{2}s=1\in\mathbf{Z}$ 成立，则 $s=\frac{1}{2}\times2=1$，$i=4+1=5$，$s=1$ 成立.

跳出循环体，输出 $i=5$. 故选 C.

7. C 【解析】因为 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{3}\right)=0$，所以 $\frac{\pi}{6}\omega-\frac{\pi}{3}=k\pi$，则 $\omega=6k+2,k\in\mathbf{Z}$①. 因为 $0<x<\frac{5\pi}{48}$，所以 $-\frac{\pi}{3}<\omega x-\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{48}\omega-\frac{\pi}{3}$. 又 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{5\pi}{48}\right)$ 上单调，所以 $\frac{5\pi}{48}\omega-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $0<\omega\leqslant8$②. 由①②可得，ω 的取值集合为 $\{2,8\}$. 故选 C.

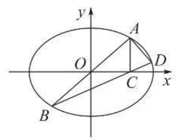
8. B 【解析】因为 $a^3b=100$，所以 $\lg a^3b=2$，即 $3\lg a+\lg b=2$，所以 $\log_a 10+3\log_b 10=\frac{1}{\lg a}+\frac{3}{\lg b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lg a}+\frac{3}{\lg b}\right)\cdot(3\lg a+\lg b)=\frac{1}{2}\left(6+\frac{\lg b}{\lg a}+\frac{9\lg a}{\lg b}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(6+2\sqrt{\frac{\lg b}{\lg a}\cdot\frac{9\lg a}{\lg b}}\right)=6$，当且仅当 $\lg b=3\lg a$，即 $a=10^{\frac{1}{3}}$，$b=10$ 时等号成立，所以 $\log_a 10+3\log_b 10$ 的最小值为 6. 故选 B.

9. D 【解析】如图,因为以 AB 为直径的圆恰好经过双曲线的右焦点 F,所以 AB 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=c^2$,圆也过左焦点 F_1,所以 AB 与 F_1F 相等且平分,所以四边形 AF_1BF 为矩形,所以 $|AF|=|BF_1|$. 设 $|AF|=m$, $|BF|=n$,则 $|AF|-|BF|=|BF_1|-|BF|=m-n=2a$,所以 $m^2+n^2-2mn=4a^2$. 因为 $AF\perp BF$,所以 $m^2+n^2=|AB|^2=4c^2$. 因为 $\triangle ABF$ 的面积为 $4a^2$,所以 $\frac{1}{2}mn=4a^2$,得 $mn=8a^2$,所以 $4c^2-16a^2=4a^2$,得 $c^2=5a^2$,所以 $a^2+b^2=5a^2$,所以 $b^2=4a^2$,得 $b=2a$,所以双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm 2x$. 故选 D.



10. B 【解析】令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$,则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,所以当 $x>\mathrm{e}$ 时, $f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 单调递减;当 $0<x<\mathrm{e}$ 时, $f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 单调递增. 因为 $a=\sqrt{2}$,所以 $\ln a=\frac{1}{2}\ln 2=\frac{\ln 4}{4}$. 又 $\mathrm{e}<\pi<4$,所以 $f(\mathrm{e})>f(\pi)>f(4)$,所以 $\ln b=\frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}$, $\ln c=\frac{\ln \pi}{\pi}$,所以 $\ln b>\ln c>\ln a$,故 $a<c<b$. 故选 B.

11. A 【解析】如图,设点 $A(x_0,y_0)$,其中 $x_0>0$, $y_0>0$,则 $B(-x_0,-y_0)$, $C(x_0,0)$,则 $k_{AB}=\frac{y_0}{x_0}$, $k_{BC}=\frac{y_0}{2x_0}$. 设点 $D(x_1,y_1)$,则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 作差可得 $\frac{x_1^2-x_0^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_0^2}{b^2}=0$,所以 $\frac{y_1^2-y_0^2}{x_1^2-x_0^2}=-\frac{b^2}{a^2}$,所以 $k_{DA}k_{DB}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{y_1+y_0}{x_1+x_0}=\frac{y_1^2-y_0^2}{x_1^2-x_0^2}=-\frac{b^2}{a^2}\neq -1$,则 AD, BD 不互相垂直,所以 $AD\perp AB$,则 $k_{AD}k_{AB}=-1$,所以 $k_{AD}=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{x_0}{y_0}$. 又因为 $k_{DA}k_{DB}=k_{DA}k_{BC}=-\frac{x_0}{y_0}\cdot\frac{y_0}{2x_0}=-\frac{1}{2}$,所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$,所以该椭圆的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 A.



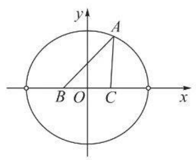
12. B 【解析】由已知易得 $p=2$,则 $F(1,0)$. 设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,则 $x_1x_2=1$, $y_1y_2=-4$, $\overrightarrow{MA}=(x_1+1,y_1+1)$, $\overrightarrow{MB}=(x_2+1,y_2+1)$. 因为 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$,所以 $(x_1+1)(x_2+1)+(y_1+1)(y_2+1)=0$,化简得 $x_1+x_2+y_1+y_2=1$. 设 AB 的中点 N 的坐标为 (x_0,y_0),则 $x_0+y_0=\frac{1}{2}$①. 又由直线的斜率公式,

得 $k=k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_1-y_2}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}}=\frac{4}{y_1+y_2}=\frac{2}{y_0}$，且 $k=k_{NF}=\frac{y_0}{x_0-1}$，所以 $\frac{2}{y_0}=\frac{y_0}{x_0-1}$，即 $y_0^2=2(x_0-1)$②.

由①②，解得 $x_0=\frac{3}{2}$，所以 $|AB|=x_1+x_2+p=2x_0+p=5$. 故选 B.

13. $\frac{29}{32}$ 【解析】因为 4 人分配到 4 所学校的情况总数为 $4^4=256$(种)，4 人恰好分配到 4 所学校的情况为 $A_4^4=24$(种)，所以 4 人中至少有 2 人选择到同一所学校的情况有 $256-24=232$(种)，所以 4 人中至少有 2 人选择到同一所学校的概率是 $\frac{232}{256}=\frac{29}{32}$.

14. $2\sqrt{2}$ 【解析】因为 $b+2\cos B+b\cos A=6$，所以由余弦定理得 $b+a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=6$，整理得 $b+c=6$，即 $|AB|+|AC|=6$. 又 $a=2$，即 $|BC|=2$，所以点 A 在以 B，C 为焦点，长轴长为 6 的椭圆上(不在直线 BC 上). 如图，以 BC 所在直线为 x 轴，线段 BC 的中垂线为 y 轴建立平面直角坐标系. 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a_0^2}+\frac{y^2}{b_0^2}=1$，则 $a_0=3$，$c_0=1$，所以 $b_0=\sqrt{a_0^2-c_0^2}=2\sqrt{2}$. 当点 A 是椭圆短轴顶点时，点 A 到 BC 的距离最大为 $b_0=2\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle ABC}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.



15. 8π 【解析】考虑上底长为 2，下底长为 4，内切圆半径为 r 的等腰梯形的面积：$\frac{1}{2}(2+4+2\sqrt{1+4r^2})\cdot r=\frac{1}{2}\cdot(2+4)\cdot2r$，即 $(3+\sqrt{1+4r^2})r=6r$，得 $\sqrt{1+4r^2}=3$，所以 $r^2=2$，所以球 O 的表面积 $S=4\pi r^2=8\pi$.

16. e 【解析】由 $xe^x-ax-a\ln x\geqslant0$，得 $xe^x-a(x+\ln x)\geqslant0$，则 $xe^x-a\ln(xe^x)\geqslant0$. 令 $t=xe^x(x>0)$，则 $t'=(x+1)e^x>0$，故 $t=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增，且 $t>0$. 令 $f(t)=\frac{t}{\ln t}(t>0$ 且 $t\neq1)$，则 $f'(t)=\frac{\ln t-1}{(\ln t)^2}$，所以当 $t>e$ 时，$f'(t)>0$，$f(t)$ 单增；当 $0<t<1$ 或 $1<t<e$，$f'(t)<0$，$f(t)$ 单减. 又 $xe^x-a\ln(xe^x)\geqslant0$ 等价于 $t-a\ln t\geqslant0$，①当 $t=1$ 时，$1\geqslant0$ 恒成立，所以 $a\in\mathbf{R}$；②当 $t>1$ 时，$a\leqslant\frac{t}{\ln t}$，即 $a\leqslant f(e)=e$，所以 $a\leqslant e$；③当 $0<t<1$ 时，$a\geqslant\frac{t}{\ln t}$，且 $t\to0$ 时 $f(t)\to0$，所以 $a\geqslant0$. 综上，实数 a 的取值范围是 $0\leqslant a\leqslant e$，故实数 a 的最大值是 e.

17. 解：(Ⅰ)根据频率分布直方图可得，学生一周参加课后活动的时间位于区间[13,17)的频率为 $(0.125+0.200)\times2=0.65$.

因此，估计全校学生一周参加课后活动的时间位于区间[13,17)的概率为 0.65. ………………… 3 分

(Ⅱ)从全校学生中随机选取1人,其一周参加课后活动的时间在区间$[15,17)$的概率为0.4,

所以$\xi \sim B(3,0.4)$,

则$P(\xi=0)=(1-0.4)^3=0.216$,

$P(\xi=1)=C_3^1\times 0.4^1\times(1-0.4)^2=0.432$,

$P(\xi=2)=C_3^2\times 0.4^2\times(1-0.4)^1=0.288$,

$P(\xi=3)=0.4^3=0.064$.

因此,ξ的分布列为:

ξ	0	1	2	3
P	0.216	0.432	0.288	0.064

数学期望$E\xi=0\times 0.216+1\times 0.432+2\times 0.288+3\times 0.064=1.2$. ………………………… 10分

(Ⅲ)$a>b>c$. ………………………………………………………………………… 12分

18. (Ⅰ)证明:当$n\geqslant 2$时,$S_{n-1}=Aq^{n-1}+B$,

则$a_n=S_n-S_{n-1}=Aq^n+B-(Aq^{n-1}+B)=A(q-1)q^{n-1}$. ………………………… 3分

又数列$\{a_n\}$为正项数列,所以$q\neq 0$且$q\neq 1$.

当$n=1$时,$a_1=S_1=Aq+B$.

又$A+B=0$,所以$a_1=A(q-1)$, ………………………………………………… 4分

则a_1也符合$a_n=A(q-1)q^{n-1}$.

因为$a_n=A(q-1)q^{n-1}$,$a_{n+1}=A(q-1)q^n$,

所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$,

故数列$\{a_n\}$是以$A(q-1)$为首项,q为公比的等比数列. ……………………………… 6分

(Ⅱ)解:由(Ⅰ)可知,$a_n=A(q-1)q^{n-1}$,$a_{n+2}=A(q-1)q^{n+1}$.

又由$a_{n+2}=4a_n$,得$q^2=4$.

又由数列$\{a_n\}$为正项数列,得$q>0$,则$q=2$.

又$a_1=1$,且$a_1=A(q-1)$,得$A=1$,

所以$a_n=2^{n-1}$, ………………………………………………………………… 9分

则$T_n=1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+n\cdot 2^{n-1}$,

$2T_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$,

两式相减得$-T_n=2^0+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-n\cdot 2^n=\frac{1-2^n}{1-2}-n\cdot 2^n=(1-n)\cdot 2^n-1$,

则$T_n=1+(n-1)\cdot 2^n$. ………………………………………………………… 12分

19. (Ⅰ)证明:由$\angle ABC=90^\circ$,$AD /\!/ BC$,且$AD=AB=\frac{1}{2}BC=2$,

如图,取BC的中点M,连接DM,

则$DM=MC=2$,且$DM\perp MC$,

所以 $DC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

又$\triangle PDC$是以$\angle DPC$为直角的等腰直角三角形，

所以 $DP=CP=2$.

过点 P 作 $PN\perp CD$，垂足为 N，则 N 为 DC 的中点，且 $PN=\sqrt{2}$.

因为平面 $PCD\perp$平面 $ABCD$，且平面 $PCD\cap$平面 $ABCD=DC$，

所以 $PN\perp$平面 $ABCD$，

故以 AB，AD 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，过点 A 作垂直于平面 $ABCD$ 的 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，…………………………………………………………………… 2 分

则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$D(0,2,0)$，$C(2,4,0)$，$P(1,3,\sqrt{2})$，则$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$.

因为 E 为棱 PC 的中点，点 F 在棱 PD 上，且 $PF=2FD$，

所以 $E\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$F\left(\frac{1}{3},\frac{7}{3},\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$，

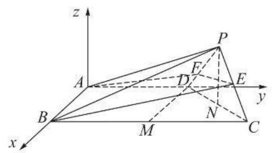
则$\overrightarrow{AE}=\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AF}=\left(\frac{1}{3},\frac{7}{3},\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$. …………………………………………… 4 分

令$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AF}$，

则$\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\lambda(2,0,0)+\mu\left(\frac{1}{3},\frac{7}{3},\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{3}{2}$，

故$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$，则$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}$共面，且向量$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}$有公共点 A，

所以 A，B，E，F 四点共面. …………………………………………………………… 6 分



(Ⅱ)解：由(Ⅰ)可知，$\overrightarrow{BP}=(-1,3,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BC}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{BA}=(-2,0,0)$.

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x_1+3y_1+\sqrt{2}z_1=0,\\ -2x_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=1$，则 $x_1=0$，$z_1=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 $\boldsymbol{m}=\left(0,1,-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. ………………………………… 8 分

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x_2+3y_2+\sqrt{2}z_2=0,\\ 4y_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=1$，则 $y_2=0$，$z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\boldsymbol{n}=\left(1,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ………………………………………… 10 分

设平面 PAB 与平面 PBC 夹角为 θ,

则 $\cos\theta=|\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\frac{3}{2}}{\sqrt{1+\frac{9}{2}}\times\sqrt{1+\frac{1}{2}}}=\dfrac{\sqrt{33}}{11}$,

所以平面 PAB 与平面 PBC 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{33}}{11}$. ………………………………………… 12 分

20. 解:(Ⅰ)由题意,得 $\begin{cases}\dfrac{2b^2}{a}=3,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ a^2-b^2=c^2,\end{cases}$ ………………………………………… 2 分

解得 $a^2=4,b^2=3$,

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………………………… 4 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)可得,$F_1(-1,0)$.

若直线 l_1 的斜率为 0,则直线 l_2 的方程为 $x=-1$ 与直线 $x=1$ 无交点,不满足条件.

设直线 l_1 的方程为 $x=my-1$,

若 $m=0$,则 $\lambda=1$,不满足 $\overrightarrow{QA}=\lambda\overrightarrow{QB}$,所以 $m\neq0$, ………………………………………… 5 分

则直线 l_2 的方程为 $x=-\dfrac{1}{m}y-1$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),Q(x_0,y_0)$.

由 $\begin{cases}3x^2+4y^2=12,\\ x=my-1,\end{cases}$ 得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$,

所以 $y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4},y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$. ………………………………………… 6 分

因为 $\begin{cases}\overrightarrow{AF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1B},\\ \overrightarrow{QA}=\lambda\overrightarrow{QB},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(-1-x_1,-y_1)=\lambda(x_2+1,y_2),\\ (x_1-x_0,y_1-y_0)=\lambda(x_2-x_0,y_2-y_0),\end{cases}$

则 $-y_1=\lambda y_2,y_1-y_0=\lambda(y_2-y_0)$,

所以 $\lambda=-\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{y_1-y_0}{y_2-y_0}$,解得 $y_0=\dfrac{2y_1y_2}{y_1+y_2}=-\dfrac{3}{m}$,则 $x_0=-4$,

即 $Q\left(-4,-\dfrac{3}{m}\right)$. ………………………………………… 9 分

联立 $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{m}y-1,\\ x=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=-2m,\end{cases}$ 即 $P(1,-2m)$, ………………………………………… 10 分

所以 $|PQ|=\sqrt{5^2+\left(-\dfrac{3}{m}+2m\right)^2}\geqslant5$,当且仅当 $m=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $m=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 时等号成立,

所以 $|PQ|$ 的最小值为 5. ………………………………………… 12 分

21. 解:(Ⅰ)由 $g(x)=e^x-2x+\sin x$,得 $g'(x)=e^x-2+\cos x$,且 $g'(0)=0$. ………………………………………… 1 分

令 $\varphi(x)=g'(x)$，则 $\varphi'(x)=e^x-\sin x$，

当 $x\in(0,+\infty)$时，$\varphi'(x)=e^x-\sin x>1-\sin x\geqslant 0$，所以 $\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以 $\varphi(x)=g'(x)>g'(0)=0$，

所以 $g(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$. …………………………………………………………… 3 分

当 $x\in(-\infty,0)$时，$g'(x)=e^x-2+\cos x<\cos x-1\leqslant 0$，

所以 $g(x)$的单调递减区间为$(-\infty,0)$. …………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)由题意，得 $F(x)=g(x)-f'(x)=e^x-2x+\sin x-ax^2-1$，且 $F(0)=0$，

则 $F'(x)=e^x+\cos x-2ax-2$，$x\in[0,+\infty)$.

令 $G(x)=F'(x)$，则 $G'(x)=e^x-\sin x-2a$.

令 $H(x)=G'(x)$，则 $H'(x)=e^x-\cos x\geqslant 1-\cos x\geqslant 0$，

所以 $G'(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增.

①若 $a\leqslant\frac{1}{2}$，则 $G'(x)\geqslant G'(0)=1-2a\geqslant 0$，

此时 $G(x)$单调递增，即 $F'(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，

所以 $F'(x)\geqslant F'(0)=0$，

所以 $F(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，

此时 $F(x)\geqslant F(0)=0$ 恒成立. ………………………………………………………………………… 8 分

②若 $a>\frac{1}{2}$，则 $G'(0)=1-2a<0$，$G'(\ln(2a+2))=2-\sin(2a+2)>0$，

所以存在 $x_0\in(0,\ln(2a+2))$，使 $G'(x_0)=0$，

故存在 $x\in(0,x_0)$，使得 $G'(x)<0$，

此时 $G(x)$单调递减，即 $F'(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，

所以 $F'(x)\leqslant F'(0)=0$，

故 $F(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，

此时 $F(x)\leqslant F(0)=0$，不符合题意. ………………………………………………………………… 11 分

综上，实数 a 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$. ……………………………………………………………… 12 分

22. 解：(Ⅰ)因为 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，且曲线 C_2：$\rho^2-4\rho\sin\theta+3=0$，

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4y+3=0$，即 $x^2+(y-2)^2=1$. ……………… 2 分

当 $\theta_0=\frac{\pi}{2}$时，显然成立；

当 $\theta_0\neq\frac{\pi}{2}$时，设直线方程为 $y=x\tan\theta_0$，圆心$(0,2)$到直线的距离为 d，

因为直线与圆有两个交点，所以 $d=\frac{2}{\sqrt{\tan^2\theta_0+1}}<1$，

解得 $\tan\theta_0>\sqrt{3}$或 $\tan\theta_0<-\sqrt{3}$，

又因为 $\theta_0\in(0,\pi)$，所以 $\theta_0\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$.

综上，θ_0 的取值范围是 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$. ………………………………………………………… 5分

（Ⅱ）设 P,Q 两点对应的极径分别为 ρ_1,ρ_2.

将 $\theta=\theta_0(\theta_0\in(0,\pi),\rho\geqslant0)$ 代入 $\rho^2-4\rho\sin\theta+3=0$，

得 $\rho^2-4\rho\sin\theta_0+3=0$，则 $\rho_1+\rho_2=4\sin\theta_0$，$\rho_1\rho_2=3$，

所以 $\frac{1}{|OP|}+\frac{1}{|OQ|}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}=\frac{4\sin\theta_0}{3}$. ………………………………………… 9分

因为 $\theta_0\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $\sin\theta_0\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，则 $\frac{4\sin\theta_0}{3}\in\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{4}{3}\right]$，

所以 $\frac{1}{|OP|}+\frac{1}{|OQ|}$ 的取值范围是 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{4}{3}\right]$. ……………………………………………… 10分

23. 解：（Ⅰ）由题意，得 $\begin{cases}f(4)\leqslant7,\\ f\left(-\frac{2}{3}\right)\leqslant7,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}|m-4|\leqslant1,\\ \left|m+\frac{2}{3}\right|\leqslant\frac{11}{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}3\leqslant m\leqslant5,\\ -\frac{13}{3}\leqslant m\leqslant3,\end{cases}$

所以 $m=3$. …………………………………………………………………………………… 3分

经检验，$m=3$ 符合题意. ………………………………………………………………………… 5分

（Ⅱ）因为 $a+b+c=m=3$，

所以 $(a+c)^2+(a+b+2c)^2+(2a+b+c)^2$

$=(3-b)^2+(3+c)^2+(a+3)^2$

$=(b-3)^2+(c+3)^2+(a+3)^2$.

由柯西不等式可知，$[(b-3)^2+(c+3)^2+(a+3)^2](1^2+1^2+1^2)\geqslant[(b-3)+(c+3)+(a+3)]^2=36$，

所以 $(b-3)^2+(c+3)^2+(a+3)^2\geqslant12$，

即 $(a+c)^2+(a+b+2c)^2+(2a+b+c)^2\geqslant12=4m$，…………………………………………………… 9分

当且仅当 $a=-1,b=5,c=-1$ 时等号成立. ………………………………………………………… 10分