昆明市2023届“三诊一模”高三复习教学质量检测

数学参考答案及评分标准

一、单选题　二、多选题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	D	B	D	A	C	B	BCD	AD	BCD	ABD

三、填空题

13．3　　14．$\frac{6}{7}$　　15．-1　　16．$\frac{25}{9}$

四、解答题

17．解：

（1）由题，圆形木板的直径 $2R=\sqrt{5^2+10^2}=5\sqrt{5}$（cm）．

由于 $\triangle ABC$ 为该圆的内接三角形，由正弦定理得 $\sin C=\frac{c}{2R}=\frac{4\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$．…………5 分

（2）由于 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=8$，所以 $ab=20$．　　……………6 分

又 $a>c$，所以 $A>C$，则 $C\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\cos C=\frac{3}{5}$．

由余弦定理得 $(4\sqrt{5})^2=a^2+b^2-2ab\times\frac{3}{5}$，所以 $a^2+b^2=104$，　　……………8 分

则 $(a+b)^2=144$，故 $a+b=12$．

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $12+4\sqrt{5}$（cm）．　　……………………10 分

18．解：

（1）由散点图知，模型②更适宜作为年销售量 y 关于年份代码 x 的回归方程．

……………………3 分

（2）设 $t=x^2$，由已知得 $\bar{t}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i^2}{5}=11$，$\bar{y}=34$，

$\sum_{i=1}^{5}t_iy_i=\sum_{i=1}^{5}x_i^2y_i=2805$，$\sum_{i=1}^{5}t_i^2=\sum_{i=1}^{5}x_i^4=979$，　　……………………5 分

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}t_iy_i-n\bar{t}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}t_i^2-n\bar{t}^2}=\frac{2805-5\times11\times34}{979-5\times11^2}=\frac{2805-1870}{979-605}=\frac{935}{374}=2.5$，　　…………7 分

$\hat{a}=34-2.5\times11=6.5$，

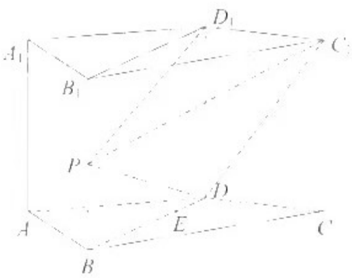
所以 y 关于 t 的回归方程为 $\hat{y}=6.5+2.5t$，

即 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=6.5+2.5x^2$．　　……………………9 分

（3）2023 年对应的年份代码为 $x=6$，得 $\hat{y}=6.5+2.5\times6^2=96.5$，
所以预计 2023 年该公司新能源汽车销售量约为96.5 万辆. ……………………12 分

19．解：
（1）因为 $(n-1)S_n+2na_{n+1}=0$，而 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，
故 $(n-1)S_n+2n(S_{n+1}-S_n)=0$，所以 $\frac{S_{n+1}}{n+1}=\frac{1}{2}\times\frac{S_n}{n}$，
即 $b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$，而 $b_1=S_1=a_1=\frac{1}{2}$，
所以数列 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项，$\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列. ……………5 分
（2）因为 $\frac{S_n}{n}=(\frac{1}{2})^n$，所以 $S_n=\frac{n}{2^n}$，而 $a_{n+1}=\frac{(1-n)S_n}{2n}=\frac{1-n}{2^{n+1}}$.
当 $n=1$ 时，$c_1=\frac{1}{4^3\times a_3^2}=1$，所以 $T_1<2$.
当 $n\geq2$ 时，$c_n=\frac{1}{4^{n+2}\cdot a_{n+2}^2}=\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，……………8 分
所以 $T_n=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=2-\frac{1}{n}<2$.
综上，$T_n<2$. ………………12 分

20．解：
（1）选①
如图，设 AC 与 BD 的交点为 E，
因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形，$AC\perp BD$，
则 E 为 AC 的中点，所以 $DA=DC$，$\triangle BAD\cong\triangle BCD$，
$\angle BAD=\angle BCD=90°$，即 $CB\perp CD$，……………3 分
又 $CC_1\perp BC$，所以 $BC\perp$ 平面 D_1DCC_1，
故 $BC\perp DC_1$. ………………………………………6 分

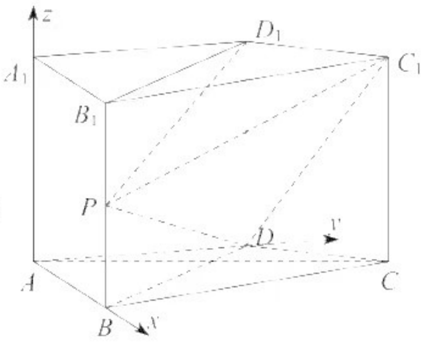


选②
因为 $\angle BAD+\angle ADC+\angle DCB+\angle CBA=360°$，
$\angle BAD=90°$，$\angle ADC=120°$，$\angle CBA=60°$，
所以 $\angle DCB=90°$，即 $CB\perp CD$，………………………………3 分
又 $CC_1\perp BC$，所以 $BC\perp$ 平面 D_1DCC_1，
故 $BC\perp DC_1$. ……………………………………6 分
选③
因为 $BD=2AD$，所以 $\angle ABD=30°$，则 $\angle CBD=30°$，
$\triangle BAD\cong\triangle BCD$，$\angle BAD=\angle BCD=90°$，即 $CB\perp CD$，……………3 分
又 $CC_1\perp BC$，所以 $BC\perp$ 平面 D_1DCC_1，
故 $BC\perp DC_1$. ……………………………………6 分

（2）如图，建立空间直角坐标系 $A-xyz$，设 $AA_1=2$，

则 $D(0,2,0)$，$D_1(0,2,2)$，$P(2\sqrt{3},0,1)$，$C_1(\sqrt{3},3,2)$，

那么 $\overrightarrow{DD_1}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{DC_1}=(\sqrt{3},1,2)$，$\overrightarrow{DP}=(2\sqrt{3},-2,1)$，……………………………8 分



设平面 PDC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}$，

平面 PDD_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=(5,3\sqrt{3},-4\sqrt{3})$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DD_1}=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},0)$，…………10 分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{7}{10}$，

所以平面 PDC_1 与平面 PDD_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{7}{10}$. ……………………12 分

21．解：

（1）设焦距为 $2c$，则 $c=1$，故 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{a}$，由 $\begin{cases}a^2-b^2=1,\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^2b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{2},\\ b=1.\end{cases}$

所以椭圆 E 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………………………4 分

（2）当 l 的斜率不存在时，若 $OABC$ 为平行四边形，则点 B 为长轴端点，A，C 的坐标分别为 $(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，所以 $S_{OABC}=2\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. …………………5 分

当 l 的斜率存在时，设 l 的方程为 $y=kx+m$，$A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2+2y^2=2,\end{cases}$ 消去 y 可得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，

由 $\Delta>0$ 可得 $m^2<1+2k^2$，$x_1+x_2=-\dfrac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2m^2-2}{1+2k^2}$，

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\dfrac{2m}{1+2k^2}$，

由 $OABC$ 为平行四边形可知：$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$，

所以 $P(-\dfrac{4km}{1+2k^2},\dfrac{2m}{1+2k^2})$，代入椭圆方程得：$4m^2=1+2k^2$，满足 $\Delta>0$，………8 分

$|AC|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{\sqrt{6}\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+2k^2}}$，

O 到 l 的距离为 $\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{\sqrt{1+2k^2}}{2\sqrt{1+k^2}}$，

所以 $S_{OABC}=2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+2k^2}}\times\frac{\sqrt{1+2k^2}}{2\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

故平行四边形 $OABC$ 的面积为定值 $\frac{\sqrt{6}}{2}$． ……………………………12 分

22．解：

（1）由题，得 $f'(x)=e^x-\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=e^x-\frac{1-\ln x}{x^2}$， 所以 $f'(1)=e-1$． ……2 分

又 $f(1)=e-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(e-1)=(e-1)(x-1)$，

即 $(e-1)x-y=0$． ……………………………4 分

（2）由于 $g(x)=e^x-\frac{\ln x}{x}-1-\frac{a}{x}=\frac{1}{x}(xe^x-\ln x-x-a)$ 有两个零点为 x_1， x_2，且有 $0<x_1<x_2$，

所以方程 $xe^x-\ln x-x-a=0$ 有两个不等的正实根 x_1， x_2，

即 $x_1e^{x_1}-\ln x_1-x_1-a=0$， $x_2e^{x_2}-\ln x_2-x_2-a=0$；

令 $x_1e^{x_1}=t_1$， $x_2e^{x_2}=t_2$， 又由于 $y=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且当 $x>0$ 时， $y>0$，

所以 $0<t_1<t_2$， 且 $\ln t_1=\ln x_1e^{x_1}=\ln x_1+x_1$， $\ln t_2=\ln x_2e^{x_2}=\ln x_2+x_2$，

则有 $t_1=\ln t_1+a$ ①， $t_2=\ln t_2+a$ ②； 由② − ①，得 $\ln\frac{t_2}{t_1}=t_2-t_1$．

令 $u=\frac{t_2}{t_1}$， 则 $u>1$， 由 $\begin{cases}\ln\frac{t_2}{t_1}=t_2-t_1,\\ u=\frac{t_2}{t_1},\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}t_1=\frac{\ln u}{u-1},\\ t_2=\frac{u\ln u}{u-1}.\end{cases}$

由于不等式 $x_1e^{x_1}+2x_2e^{x_2}=t_1+2t_2=\frac{(2u+1)\ln u}{u-1}>m$ 恒成立，

又 $u>1$， 令 $h(u)=(2u+1)\ln u-m(u-1)$， 所以 $h(u)>0$ 在 $u\in(1,+\infty)$ 上恒成立．

由于 $h'(u)=2+\frac{1}{u}+2\ln u-m$， 令 $p(u)=2+\frac{1}{u}+2\ln u-m$ （$u>1$）， 则 $p'(u)=\frac{2u-1}{u^2}$，

当 $u>1$ 时， $p'(u)>0$， 所以 $p(u)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增， 则有当 $u>1$ 时， $p(u)>p(1)=3-m$．

（ⅰ）当 $m\le 3$ 时， 当 $u>1$ 时， $h'(u)=p(u)>p(1)=3-m\ge 0$，

所以 $h(u)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增， 则有 $h(u)>h(1)=0$， 符合题意．

（ⅱ）当 $m>3$ 时， 由于 $e^m>1$， 且 $p(e^m)=2+\frac{1}{e^m}+m>0$， $p(1)=3-m<0$，

所以存在唯一的 $u_0\in(1,e^m)$ 使得 $p(u_0)=0=h'(u_0)$．

所以当 $1<u<u_0$ 时， $h'(1)<h'(u)<h'(u_0)=0$， 则 $h(u)$ 在 $(1,u_0)$ 上单调递减，

所以 $h(u)<h(1)=0$， 不符合题意．

综上，不等式 $x_1e^{x_1}+2x_2e^{x_2}>m$ 恒成立，则 $m\in(-\infty,3]$． ……………………………12 分