遵义市2023届高三年级第三次统一考试

参考答案（理科数学）

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	B	C	D	C	B	C	D	A	B	D

二、填空题

13. $\underline{\sqrt{3}}$　　14. $\underline{21}$　　15. $\underline{2}$　　16. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

三、解答题

17.（12分）

解：（1）$(a+0.035+0.03+0.02+0.01)\times 10=1$，得 $a=0.005$ ……………………3分

由图知：年龄位于$[30,40)$这一组频率为0.35，此时频率最大

所以，众数为$\dfrac{30+40}{2}=35$……………………………………5分

（2）X所有可能的值是0,1,2,3……………………………………6分

$P(X=0)=\dfrac{C_3^0C_3^3}{C_6^3}=\dfrac{1}{20}$, $P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\dfrac{9}{20}$,

$P(X=2)=\dfrac{C_3^0C_3^3}{C_6^3}=\dfrac{9}{20}$, $P(X=3)=\dfrac{C_3^3C_3^0}{C_6^3}=\dfrac{1}{20}$……………………………………10分

因此X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{20}$	$\dfrac{9}{20}$	$\dfrac{9}{20}$	$\dfrac{1}{20}$

于是X的期望为$E(X)=0\times\dfrac{1}{20}+1\times\dfrac{9}{20}+2\times\dfrac{9}{20}+3\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{3}{2}$（人）……………………12分

18.（12分）

解：（1）由题知：$S_n+n=2a_n$ ①

当$n=1$时，$S_1=a_1=1$……………………………………1分

当$n\geq 2$时，$S_{n-1}+(n-1)=2a_{n-1}$ ②

①-②得到，$a_n+1=2a_n-2a_{n-1}$，化简得：$a_n=2a_{n-1}+1$……………………3分

所以$a_n+1=2(a_{n-1}+1)$……………………………………4分

所以$\{a_n+1\}$是以2为首项，2为公比的等比数列……………………5分

（2）由（1）知：$a_n+1=(a_1+1)2^{n-1}=2^n$，即$a_n=2^n-1$……………………6分

$\therefore b_n=\dfrac{2^n}{a_na_{n+1}}=\dfrac{2^n}{(2^n-1)\times(2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$ ……………………8分

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=(\dfrac{1}{2^1-1}-\dfrac{1}{2^2-1})+(\dfrac{1}{2^2-1}-\dfrac{1}{2^3-1})+\cdots+(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1})$……………………10分

$=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$

由$1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}<\dfrac{13}{14}$得，$2^{n+1}<15$，故$n$的最大值为2……………………………………12 分

19.（12 分）

解：（1）如图，以D点为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系$D\text{-}xyz$.

A(4，0，0)，C'(1，3，$\sqrt{3}$)，D(0，0，0)，B(4，4，0)

$\overrightarrow{AC'}=\left(-3,3,\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{DB}=\left(4,4,0\right)$

因为$\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{AC'}=0$，所以$AC'\perp BD$……………………………………………………6 分

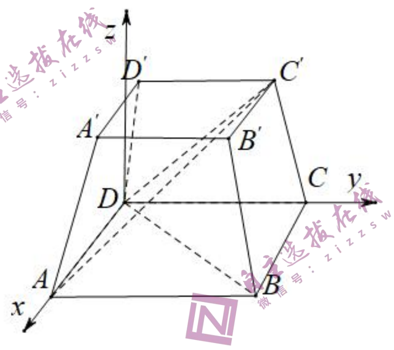
（2）由(1)知$\overrightarrow{DA}=\left(4,0,0\right)$，$\overrightarrow{DC'}=\left(1,3,\sqrt{3}\right)$ $\overrightarrow{DB}=\left(4,4,0\right)$

设平面$AC'D$与平面$DC'B$的法向量分别为$\vec{m}=(x_0，y_0，z_0)$，$\vec{n}=(x_1，y_1，z_1)$

则$\begin{cases}\overrightarrow{DA}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{DC'}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$即$\begin{cases}4x_0=0\\ x_0+\sqrt{3}y_0+z_0=0\end{cases}$，令$y_0=1$，则$z_0=-\sqrt{3}$，即$\vec{m}=(0,1,-\sqrt{3})$

同理可求得$\vec{n}=(\sqrt{3},-\sqrt{3},2)$，于是$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{3\sqrt{30}}{20}$

因此二面角$A-DC'-B$的余弦值是$\dfrac{3\sqrt{30}}{20}$……………………………………………………12 分



20.（12 分）

解：（1）由题可知有$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1$，$a^2-b^2=c^2$联立解得$a=2,b=\sqrt{3},c=1$

所以椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$……………………………………………………5 分

（2）由直线l的斜率为$\dfrac{1}{2}$，可设直线l的方程为$x=2y+t$，

联立椭圆方程消去x可得

$$16y^2+12ty+3t^2-12=0$$

设P,Q的坐标为$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

则$y_1+y_2=-\dfrac{3t}{4}$，$y_1y_2=\dfrac{3t^2-12}{16}$ ①……………………………………………………7 分

所以$x_1+x_2=2(y_1+y_2)+2t=\dfrac{t}{2}$，

所以$k_{AP}+k_{AQ}=\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\dfrac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}=\dfrac{(y_1-\frac{3}{2})(x_2-1)+(y_2-\frac{3}{2})(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$……………9 分

展开整理得 $k_{AP}+k_{AQ}=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1-\frac{3}{2}(x_1+x_2)-(y_1+y_2)+3}{(x_1-1)(x_2-1)}$，

$x_1y_2+x_2y_1=(2y_1+t)y_2+(2y_2+t)y_1=-3$ ②

将①②代入可得

$k_{AP}+k_{AQ}=0$，从而 $\angle AMN=\angle ANM$ ，因此 $|AM|=|AN|$ ……………………………12 分

21.（12 分）

解：（1）证明：$\because f(x)=\sin x-e^x$，

$\therefore f'(x)=\cos x-e^x$ ……………………………………………………………1 分

记 $g(x)=f'(x)$，

$\therefore g'(x)=-\sin x-e^x$，$g''(x)=-\cos x-e^x$ ……………………………………2 分

$\because x\in(-1,0)$，$\therefore -\cos x<0$，$-e^x<0$

$\therefore g''(x)<0$，$\therefore g'(x)$ 在 $(-1,0)$ 单调递减

且 $g'(-1)=-\sin(-1)-e^{-1}=\sin 1-\dfrac{1}{e}>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e}>0$，$g'(0)=-1<0$ …………………4 分

所以在 $(-1,0)$ 存在唯一 x_0，使得 $g'(x_0)=0$

当 $-1<x<x_0$， $g'(x)>0, g(x)$ 在 $(-1,x_0)$ 单调递增

当 $x_0<x<0$， $g'(x)<0, g(x)$ 在 $(x_0,0)$ 单调递减

所以 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 存在唯一极大值点……………………………………………6 分

（2）$\because \forall x\in(-1,0)$，都有 $f(x)\le a\cos x$ 成立，

$\therefore a\ge\dfrac{\sin x-e^x}{\cos x}$，记 $h(x)=\dfrac{\sin x-e^x}{\cos x}$

$\therefore h'(x)=\dfrac{(\cos x-e^x)\cos x+(\sin x-e^x)\sin x}{\cos^2 x}=\dfrac{1-e^x(\sin x+\cos x)}{\cos^2 x}$

记 $t(x)=e^x(\sin x+\cos x)$，$\therefore t'(x)=2e^x\cos x>0\ (x\in(-1,0))$

$\therefore t(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，$\therefore t(x)<t(0)=1$

$\therefore h'(x)>0$

$\therefore h(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增且 $h(0)=-1$

$\therefore a\ge -1$

………………………………………………………………………………………………12 分

22.（10 分）

解：（1）由题得 $\begin{cases} x-2=\dfrac{1}{2}t \\ y-\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$

所以直线 l 的直角坐标方程为 $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$ ………………………………………2 分

$\because$ 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=6\cos\theta$

$\therefore \rho^2=6\rho\cos\theta$，由 $\begin{cases} \rho^2=x^2+y^2 \\ x=\rho\cos\theta \end{cases}$ 得：

曲线 C 的普通方程为 $x^2+y^2-6x=0$ ……………………………………………………5 分

（2）由点 $P(1,0)$ 可知点 P 在直线 l 上

则直线 l 的参数方程可写为：$\begin{cases} x=1+\dfrac{1}{2}t' \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t' \end{cases}$（$t'$ 为参数）……………………………………………6 分

将直线参数方程带入曲线 C 的普通方程为 $x^2+y^2-6x=0$ 得：

$t'^2-2t'-5=0$

不妨假设 A,B 两点对应的参数分别为 t_1',t_2'，则：

$t_1'+t_2'=2$，$t_1't_2'=-5$ ……………………………………………………………………………8 分

$\therefore |PA|+|PB|=|t_1'|+|t_2'|=\sqrt{(t_1'+t_2')^2-4t_1't_2'}=2\sqrt{6}$ ……………………………………………10 分

23.（10 分）

解：（1）由题意：

①当 $x<1$ 时，$f(x)=-2x+3$，则：$-2x+3\le 5$，解得 $x\ge -1$

此时 $-1\le x<1$

②当 $1\le x\le 2$ 时，$f(x)=1$，则：$f(x)\le 5$ 恒成立

此时 $1\le x\le 2$

③当 $x>2$ 时，$f(x)=2x-3$，则：$2x-3\le 5$，解得 $x\le 4$

此时 $2<x\le 4$

综上所述，不等式 $f(x)\le 5$ 的解集为 $[-1,4]$ ……………………………………………………………5 分

（2）由绝对值三角不等式得 $f(x)=|x-1|+|x-2|\ge |(x-1)-(x-2)|=1$ ………………………………7 分

（当且仅当 $(x-1)(x-2)\le 0$ 时等号成立）

因为函数 $f(x)$ 的最小值为 t

$\therefore t=1 \Rightarrow a+b+c=1$

由柯西不等式得：

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c})(a+b+c)\ge (1+1+1)^2=9$

$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge 9$，当且仅当 $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ 时，“=”成立……………………………………10 分