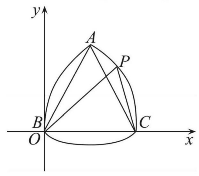
# 2023 届“皖南八校”高三第三次大联考·数学
## 参考答案、解析及评分细则

1.D　由题意得，集合 $A=\{0,1,2,3\}$，则集合 $B=\{0,1,4,9\}$，所以集合 $A\cup B=\{0,1,2,3,4,9\}$ 的非空真子集的个数为 $2^6-2=62$. 故选 D.

2.D　由 $\mathrm{i}z=\dfrac{1+\sqrt{2}\mathrm{i}}{|1+\mathrm{i}|}=\dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}\mathrm{i})}{2}$ 得 $z=\dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}\mathrm{i})}{2\mathrm{i}}=\dfrac{(\sqrt{2}+2\mathrm{i})\mathrm{i}}{-2}=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$，∴复数 $z$ 在复平面内对应的点为 $\left(1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，∴复数 $z$ 在复平面内对应的点所在的象限为第四象限. 故选 D.

3.C　对于 A，由全称命题的否定知该命题的否定为 $\exists x_0>0, x_0^2+x_0\leqslant 1$，A 错误；对于 B，“$\alpha>\beta$”是“$\sin\alpha>\sin\beta$”的既不充分又不必要条件，B 错误；对于 C，取 $\alpha=\beta=0$，则 $\sin(\alpha+\beta)=\sin 0=\sin 0+\sin 0=\sin\alpha+\sin\beta$，C 正确；对于 D，“$a>b$”是“$2^a>2^b$”的充要条件，D 错误. 故选 C.

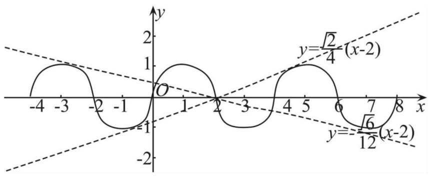
4.C　设事件 $A$ 为系统正常工作，事件 $B$ 为只有 $M$ 和 $A_1$ 正常工作，因为并联元件 $A_1$、$A_2$ 能正常工作的概率为 $1-\left(1-\dfrac{3}{4}\right)\left(1-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{15}{16}$，所以 $P(A)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{15}{16}=\dfrac{15}{32}$，又因为 $P(AB)=P(B)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\left(1-\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3}{32}$，所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{1}{5}$. 故选 C.




5.C　如图所示，以 $B$ 为坐标原点，直线 $BC$ 为 $x$ 轴，过点 $B$ 且垂直于 $BC$ 的直线为 $y$ 轴，建立平面直角坐标系，$P(\sqrt{3},1)$，且 $B(0,0)$，$C(2,0)$，所以 $\overrightarrow{BP}=(\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{CP}=(\sqrt{3}-2,1)$，所以 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)+1\times 1=4-2\sqrt{3}$. 故选 C.

6.D　$f(x)=\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{1-\cos x}{2}+\dfrac{1}{2}=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，所以 $|f(x)|$ 的最小正周期为 $\pi$，A 错误；因为 $-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6}$，$f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}\neq 1$，所以直线 $x=-\dfrac{\pi}{6}$ 不是 $f(x)$ 图象的一条对称轴，B 错误；当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{\pi}{6}<x+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{2\pi}{3}$，而函数 $y=\sin x$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 上不单调，C 错误；当 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant m$ 时，$-\dfrac{\pi}{3}\leqslant x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{\pi}{6}+m$，因为 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},m\right]$ 上的最大值为 1，即 $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，所以 $\dfrac{\pi}{6}+m\geqslant\dfrac{\pi}{2}$，解得 $m\geqslant\dfrac{\pi}{3}$，D 正确. 故选 D.

7.A　方程 $f(x)-k(x-2)=0$ 的根转化为 $y=f(x)$ 和 $y=k(x-2)$ 的图象的公共点的横坐标，因为两个图象均关于点 $(2,0)$ 对称，要使所有根的和为 6，则两个图象有且只有 3 个公共点. 作出 $y=f(x)$ 和 $y=k(x-2)$ 的图象如图所示. 当 $k>0$ 时，只需直线 $y=k(x-2)$ 与圆 $(x-5)^2+y^2=1$ 相切，可得 $k=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$；当 $k<0$ 时，只需直线 $y=k(x-2)$ 与圆 $(x+3)^2+y^2=1$ 相切，可得 $k<-\dfrac{\sqrt{6}}{12}$. 故 $k$ 的取值范围是 $\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right\}\cup\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{6}}{12}\right)$. 故选 A.



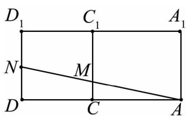

8.B　$f(x)=me^x-x-n-1$，$f'(x)=me^x-1$，当 $m\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，则 $f(x)$ 单调递减，$f(0)=m-n-1$，显然 $f(x)\geqslant -1$ 不恒成立，当 $m>0$ 时，$x\in(-\infty,-\ln m)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；$x\in(-\ln m,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，∴$f(x)_{\min}=f(-\ln m)=\ln m-n$，∵$f(x)\geqslant -1$ 恒成立，∴$\ln m-n+1\geqslant 0$，∴$m(\ln m+1)\geqslant mn$，令 $h(m)=m(\ln m+1)$，$m>0$，$h'(m)=\ln m+2$，$h(m)$ 在区间 $(0,e^{-2})$ 上单调递减，在区间 $(e^{-2},+\infty)$ 上单调递增，∴$h(m)_{\min}=h(e^{-2})=-e^{-2}$. 故选 B.

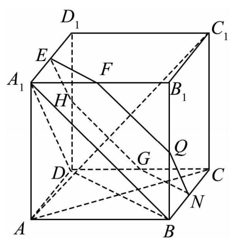
9.ACD　对于 A，因为 $(x+0.030+0.040+0.010+0.004)\times 10=1$，解得 $x=0.016$，故 A 正确；对于 B，因为成绩落在区间 $[50,60)$ 内的人数为 16，所以样本容量 $n=\dfrac{16}{0.016\times 10}=100$，故 B 错误；对于 C，学生成绩平均分为 $0.016\times 10\times 55+0.030\times 10\times 65+0.040\times 10\times 75+0.010\times 10\times 85+0.004\times 10\times 95=70.6$，故 C 正确；对于 D，因为 $10\times(0.004+0.010)+(80-x)\times 0.040=0.25$，解得 $x=77.25$，所以大约成绩至少为 77.25 分

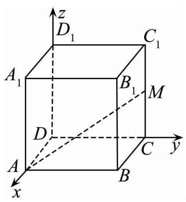
的学生能得到此称号，故 D 正确. 故选 ACD.

10. AC　$\frac{c}{ab}=\frac{a^2-ab+4b^2}{ab}=\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}-1\geqslant 2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}-1=3$，当且仅当$\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$，即$a=2b$时等号成立，此时$c=3ab=6b^2$，故 A 正确，B 错误；$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}-\frac{6}{c}=\frac{2}{2b}+\frac{1}{b}-\frac{6}{6b^2}=\frac{2}{b}-\frac{1}{b^2}=1-\left(\frac{1}{b}-1\right)^2$，当$b=1$时，$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}-\frac{6}{c}$的最大值为 1，C 正确；$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}-\frac{6}{c}$无最小值，D 错误. 故选 AC.

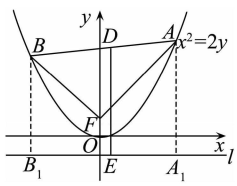
11. ACD　对于 A，将矩形$ACC_1A_1$与正方形$CC_1D_1D$展开成一个平面（如图所示），若$AM+MN$最小，则 A、M、N 三点共线，因为$CC_1 /\!/ DD_1$，所以$\frac{MC}{DN}=\frac{AC}{AD}=\frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+4}=2-\sqrt{2}$，所以$MC=(2-\sqrt{2})DN=\frac{2-\sqrt{2}}{2}CC_1$，即$\frac{MC}{CC_1}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 A 正确；对于 B，当点$M$与点$C_1$重合时，连接$A_1D$、$BD$、$A_1B$、$AC$、$AC_1$，（如图所示），在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$CC_1\perp$平面$ABCD$，$BD\subset$平面$ABCD$，所以$BD\perp CC_1$，又因为$BD\perp AC$，且$AC\cap CC_1=C$，所以$BD\perp$平面$ACC_1$，又$AC_1\subset$平面$ACC_1$，所以$BD\perp AC_1$，同理可证$A_1D\perp AC_1$，因为$A_1D\cap BD=D$，所以$AC_1\perp$平面$A_1BD$，易知$\triangle A_1BD$是边长为$4\sqrt{2}$的等边三角形，其面积为$S_{\triangle A_1BD}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{2})^2=8\sqrt{3}$，周长为$4\sqrt{2}\times 3=12\sqrt{2}$；设$E$、$F$、$Q$、$N$、$G$、$H$分别是$A_1D_1$，$A_1B_1$、$BB_1$，$BC$，$CD$，$DD_1$的中点，易知六边形$EFQNGH$是边长为$2\sqrt{2}$的正六边形，且平面$EFQNGH /\!/$平面$A_1BD$，正六边形$EFQNGH$的周长为$12\sqrt{2}$，面积为$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{2})^2=12\sqrt{3}$，则$\triangle A_1BD$的面积小于正六边形$EFQNGH$的面积，它们的周长相等，即 B 错误；对于 C，以点$D$为坐标原点，$DA$、$DC$、$DD_1$所在直线分别为$x$、$y$、$z$轴建立空间直角坐标系，则$A(4,0,0)$，$B(4,4,0)$，设$M(0,4,a)(0\leqslant a\leqslant 4)$，因为$AM\perp$平面$\alpha$，所以$\overrightarrow{AM}$是平面$\alpha$的一个法向量，且$\overrightarrow{AM}=(-4,4,a)$，$\overrightarrow{AB}=(0,4,0)$，$|\cos\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\rangle|=\frac{16}{4\sqrt{a^2+32}}=\frac{4}{\sqrt{a^2+32}}\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$，所以直线$AB$与平面$\alpha$所成角的正弦值的取值范围为$\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$，则直线$AB$与平面$\alpha$所成角的余弦值的取值范围为$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$，故 C 正确；对于 D，当点$M$与点$C$重合时，四面体$AMD_1B_1$即为$ACD_1B_1$为正四面体，棱长$AC=4\sqrt{2}$，由正四面体的性质可得，其内切球半径$r=4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以表面积为$4\pi r^2=\frac{16\pi}{3}$，故 D 正确. 故选 ACD.








12. ABD　对于 A，经分析可知，当直线$AB$垂直于$y$轴时，$|AB|$取最小值，且为 2，A 正确；由抛物线的定义可知，$|AF|=y_A+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，解得$y_A=1$，故$x_A^2=2y_A=2$，故$|x_A|=\sqrt{2}$，所以$\triangle AOF$的面积为$\frac{1}{2}|OF|\cdot|x_A|=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，B 正确；设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线$AB$的方程为$y=kx+m$，将直线$AB$的方程代入$x^2=2y$，得$x^2-2kx-2m=0$. 由$OA\perp OB$，得$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-1=\frac{x_1}{2}\cdot\frac{x_2}{2}$，即$x_1x_2=-4$，所以$-2m=-4$，$m=2$，故直线$AB$：$y=kx+2$，恒过定点$(0,2)$，C 错误；过点$A$作$AA_1\perp l$于点$A_1$，过点$B$作$BB_1\perp l$于点$B_1$，设$|AF|=a$，$|BF|=b$，所以$|DE|=$

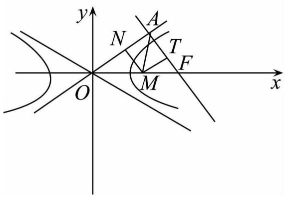


$\frac{a+b}{2}$,因为$|AB|^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle AFB=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab\geqslant(a+b)^2-\frac{3(a+b)^2}{4}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=$ $|DE|^2$,所以$|AB|\geqslant|DE|$,$\frac{|AB|}{|DE|}$的最小值为1,D正确.故选ABD.

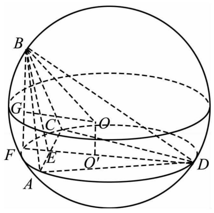
13.$[2,+\infty)$ 当$x\leqslant2$时,满足$f(x)=4-x\geqslant2$,当$x>2$时,由$f(x)=1+\log_2x>2$,所以函数$f(x)$的值域为$[2,+\infty)$.

14.14 ①若甲安排在最后一天,则不同的安排数为$A_3^3=6$;②若甲不安排在最后一天,则不同的安排数为$A_2^1A_2^1A_2^2=8$.综上,不同的安排种数为14.

15.$\sqrt{5}$ 如图所示,设点$A$在第一象限,由题意可知$|AF|=d=\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$,其中$d$为点$F(c,0)$到渐近线$y=\frac{b}{a}x$的距离,$|OF|=c$,所以$|OA|=\sqrt{|OF|^2-|AF|^2}=\sqrt{c^2-b^2}=a$,过点$M$分别作$MN\perp OA$于点$N$,$MT\perp AF$于点$T$,又因为$FA\perp OA$于点$A$,所以四边形$MTAN$为正方形,所以$|NA|=|MN|=\frac{b}{3}$,所以$|ON|=|OA|-|NA|=a-\frac{b}{3}$,又因为$\tan\angle AOF=\frac{|MN|}{|ON|}=\frac{\frac{b}{3}}{a-\frac{b}{3}}=\frac{b}{a}$,所以$\frac{a}{3}=a-\frac{b}{3}$,$b=2a$,所以$c^2=a^2+b^2=5a^2$,所以$c=\sqrt{5}a$,所以$e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$.




16.$\frac{4}{3}$ $\frac{19}{3}\pi$ 若四面体$ABCD$的体积最大时,点$B$在过$O$和$O'$的直径上,$AO'=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,$BO'=AO'\times\tan\frac{\pi}{3}=2$,设球$O$的半径为$r$,则在$Rt\triangle AO'O$中,$r^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+(2-r)^2$,解得$r=\frac{4}{3}$.设$\triangle ACD$的外接圆的半径$R$,由题可得$\frac{AC}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R$,解得$R=\frac{2}{\sqrt{3}}$.如图,取$AC$的中点$E$,连接$DE$并延长$DE$交圆$O'$于点$F$.连接$BE$,$BF$,由$\angle BED=\frac{2\pi}{3}$得,则$\angle BEF=\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$.$EF=2R-AD\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.在$\triangle ABE$中,$BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}$,所以在$\triangle BEF$中,由余弦定理得$BF^2=EF^2+BE^2-2EF\cdot BE\cos\angle BEF=1$,可得$BF\perp EF$,结合图形可得$BF\perp$圆$O'$.连接$OO'$,过点$O$作$BF$的垂线,垂足为点$G$.连接$BO$,四面体$ABCD$外接球的半径$r=\sqrt{GO^2+BG^2}=\sqrt{OO'^2+O'D^2}$解得$OO'=BG=\frac{1}{2}BF=\frac{1}{2}$.所以球$O$的半径$r=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{19}{12}}$.四面体$ABCD$外接球的表面积为$\frac{19}{3}\pi$.




17.解:(1)$2\times2$列联表如下:

| | 喜欢篮球 | 不喜欢篮球 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 男生 | 50 | 50 | 100 |
| 女生 | 25 | 75 | 100 |
| 合计 | 75 | 125 | 200 |

………………………………………………………… 2分

零假设为$H_0$:该校学生喜欢篮球与性别无关.
根据列联表中的数据,经计算得到
$\chi^2=\frac{200\times(50\times75-50\times25)^2}{100\times100\times75\times125}\approx13.3>10.828=x_{0.001}$,
∴根据小概率值$\alpha=0.001$的独立性检验,我们推断$H_0$不成立,即认为该校学生喜欢篮球与性别有关.…
…………………………………………………………………………………… 4分

(2)3 人进球总次数 $\xi$ 的所有可能取值为 0,1,2,3.

$P(\xi=0)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{1}{24}$,$P(\xi=1)=C_2^1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{13}{48}$,

$P(\xi=2)=C_2^1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$,$P(\xi=3)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{3}{16}$. ………………………… 7 分

∴$\xi$ 的分布列如下:

| $\xi$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{13}{48}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{16}$ |

……………………………………………………………………………… 8 分

∴$\xi$ 的数学期望:$E(\xi)=0\times\frac{1}{24}+1\times\frac{13}{48}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{3}{16}=\frac{11}{6}$. ……………………………………………… 10 分

18. 解:(1)△$ABC$ 中,$\cos A+\sqrt{3}\sin A=\frac{b+a}{c}$,由正弦定理得,$\cos A+\sqrt{3}\sin A=\frac{\sin B+\sin A}{\sin C}$. …………… 2 分

所以 $\sin C\cos A+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin B+\sin A$,

即 $\sin C\cos A+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin(A+C)+\sin A=\sin A\cos C+\sin C\cos A+\sin A$,

所以$\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin A\cos C+\sin A$; ………………………………………………………………… 4 分

又 $A\in(0,\pi)$,所以 $\sin A\neq 0$,所以$\sqrt{3}\sin C-\cos C=1$,所以 $\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$,

又因为 $C\in(0,\pi)$,

所以 $C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$,即 $C=\frac{\pi}{3}$; ………………………………………………………………………… 6 分

(2) 设∠$CAD=\theta$,则△$ACD$ 中,由 $C=\frac{\pi}{3}$可知 $\theta\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$,

由正弦定理及 $AD=\sqrt{3}$可得$\frac{CD}{\sin\theta}=\frac{AC}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{AD}{\sin\frac{\pi}{3}}=2$,所以 $CD=2\sin\theta$,$AC=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)$, … 8 分

所以 $a+2b=4\sin\theta+4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)=6\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta=4\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$, ……………………………… 10 分

由 $\theta\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$可知,$\theta+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$,$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$,

所以 $a+2b\in(2\sqrt{3},4\sqrt{3}]$. ……………………………………………………………………………… 12 分

19. 解:(1)由 $a_{n+1}-a_n=2^n$ 得 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=a_1+(a_2-a_1)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-2$. ……
……………………………………………………………………………………………… 2 分

又 $a_1=0$,满足 $a_n=2^n-2$,所以 $a_n=2^n-2$. ……………………………………………………………… 3 分

设等差数列$\{b_n\}$的公差为 $d$,则 $2b_3+S_5=2(b_1+2d)+5b_1+\frac{5\times4}{2}d=7b_1+14d=28$,解得 $d=1$,

所以 $b_n=n+1$; ……………………………………………………………………………………… 6 分

(2)$c_n=\frac{b_n}{a_{2n}+2}=\frac{n+1}{4^n}$, ……………………………………………………………………………… 7 分

$T_n=\frac{2}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{4}{4^3}+\cdots+\frac{n+1}{4^n}$,①

$\frac{1}{4}T_n=\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots+\frac{n}{4^n}+\frac{n+1}{4^{n+1}}$,②……………………………………………………………… 9 分

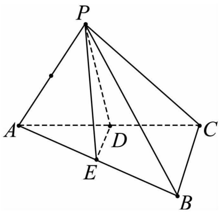
两式相减得$\frac{3}{4}T_n=\frac{2}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}-\frac{n+1}{4^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{16}-\frac{1}{4^n}\times\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{n+1}{4^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{4^{n+1}}\right)-$

$\frac{n+1}{4^{n+1}}=\frac{7}{12}-\frac{3n+7}{3\times4^{n+1}}$ ……………………………………………………………………… 11 分

所以 $T_n=\frac{7}{9}-\frac{3n+7}{9\times4^n}$. …………………………………………………………………………… 12 分

20.(1)(方法一)证明:如图,分别取 $AC$,$AB$ 的中点 $D$,$E$,连接 $PD$,$DE$,$PE$,

则 $DE/\!/BC$.




因为$\angle ACB=90^\circ$,$BC=2\sqrt{3}$,

所以 $DE\perp AC$,$DE=\sqrt{3}$.

因为$\triangle PAC$是边长为4的等边三角形,

所以 $PD\perp AC$,$PD=2\sqrt{3}$, ……………………………………………………… 2 分

在$\triangle ACB$中,$AB^2=AC^2+BC^2=4^2+(2\sqrt{3})^2=28$,$AB=2\sqrt{7}$,

在$\triangle PDE$中,$PE=\sqrt{PA^2-AE^2}=\sqrt{4^2-(\sqrt{7})^2}=3$,

所以 $PD^2=PE^2+ED^2$,

所以 $PE\perp ED$, …………………………………………………………………………………… 4 分

因为 $PA=PB$,点 $E$ 为 $AB$ 的中点,

所以 $PE\perp AB$,

又 $ED\cap AB=E$,$ED$,$AB\subset$平面 $ABC$,

所以 $PE\perp$平面 $ABC$,

因为 $PE\subset$平面 $PAB$,所以平面 $PAB\perp$平面 $ABC$. ………………………………………… 6 分

(方法二)证明:如图,分别取 $AC$,$AB$ 的中点 $D$,$E$,连接 $PD$,$PE$,$DE$,

则 $DE/\!/BC$.

因为$\angle ACB=90^\circ$,

所以 $BC\perp AC$,$AC\perp DE$,

因为$\triangle PAC$是等边三角形,

所以 $PD\perp AC$, …………………………………………………………………………………… 2 分

因为 $PD\cap DE=D$,$PD$,$DE\subset$平面 $PDE$,

所以 $AC\perp$平面 $PDE$,

又 $PE\subset$平面 $PDE$,

所以 $AC\perp PE$, …………………………………………………………………………………… 4 分

因为 $PA=PB$,点 $E$ 为 $AB$ 的中点,

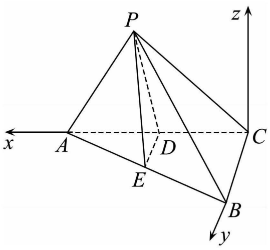
所以 $PE\perp AB$,

又 $AC\cap AB=A$,$AC$,$AB\subset$平面 $ABC$,

所以 $PE\perp$平面 $ABC$,

因为 $PE\subset$平面 $PAB$,所以平面 $PAB\perp$平面 $ABC$. ………………………………………… 6 分

(2)解:以点 $C$ 为原点,直线 $CA$,$CB$ 分别为 $x$,$y$ 轴,过点 $C$ 且与 $PE$ 平行的直线为 $z$ 轴,建立空间直角坐标系,如图所示,




则 $B(0,2\sqrt{3},0)$,$A(4,0,0)$,$E(2,\sqrt{3},0)$,$P(2,\sqrt{3},3)$,

$\overrightarrow{AB}=(-4,2\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{CB}=(0,2\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{CP}=(2,\sqrt{3},3)$,$\overrightarrow{PE}=(0,0,-3)$.

设平面 $PBC$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0\end{cases}$,即$\begin{cases}2\sqrt{3}y_1=0,\\ 2x_1+\sqrt{3}y_1+3z_1=0,\end{cases}$ ……………………………… 8 分

取 $x_1=3$,则 $\boldsymbol{m}=(3,0,-2)$.

设平面 $PAB$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PE}=0\end{cases}$,即$\begin{cases}-4x_2+2\sqrt{3}y_2=0,\\ -3z_2=0,\end{cases}$ ……………………………………………… 11 分

取 $x_2=\sqrt{3}$,则 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},2,0)$.

设二面角 $A-PB-C$ 的平面角为 $\theta$,

所以 $\cos\theta=|\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{273}}{91}$. ………………………………………… 12 分

21. 解：(1)因为线段 $EF_2$ 的中点为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 在 $y$ 轴上，$O$ 为 $F_1F_2$ 的中点，

所以 $EF_1/\!/y$ 轴，即 $EF\perp x$ 轴，

设 $E(-c,1)$，$F(-c,-1)$，$a^2=b^2+c^2$， ………………………………………… 2 分

代入椭圆 $\Gamma$ 的方程得，$\frac{c^2}{16}+\frac{1}{b^2}=1$，

又 $c^2=a^2-b^2=16-b^2$，

所以 $\frac{16-b^2}{16}+\frac{1}{b^2}=1$，即 $1-\frac{b^2}{16}+\frac{1}{b^2}=1$，所以 $\frac{1}{b^2}=\frac{b^2}{16}$，解得 $b^2=4$，

所以椭圆 $\Gamma$ 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. ………………………………………… 4 分

(2)(方法一)证明：设 $P(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，

由题意可得 $B(4,0)$，$C(0,2)$，

所以直线 $BC$ 的方程的截距式为 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$，

即为 $x+2y-4=0$. ………………………………………… 5 分

因为 $A(-4,0)$，

所以直线 $AP$ 的方程为 $y=\frac{y_0}{x_0+4}(x+4)$.

联立 $\begin{cases}x+2y-4=0,\\ y=\frac{y_0}{x_0+4}(x+4),\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{4x_0-8y_0+16}{2y_0+x_0+4},\\ y=\frac{8y_0}{2y_0+x_0+4},\end{cases}$

即 $Q\left(\frac{4x_0-8y_0+16}{2y_0+x_0+4},\frac{8y_0}{2y_0+x_0+4}\right)$； ………………………………………… 7 分

直线 $CP$ 的方程为：$y-2=\frac{y_0-2}{x_0}x$，

即 $y=\frac{y_0-2}{x_0}x+2$，

当 $y=0$ 时，$x=\frac{2x_0}{2-y_0}$，

即 $M\left(\frac{2x_0}{2-y_0},0\right)$，

所以 $S_1\cdot S_2=\frac{4x_0-8y_0+16}{2y_0+x_0+4}\cdot\frac{2x_0}{2-y_0}=\frac{8x_0^2-16x_0y_0+32x_0}{2x_0-2y_0^2-x_0y_0+8}$， ………………………………………… 9 分

又因为 $\frac{x_0^2}{16}+\frac{y_0^2}{4}=1(0<y_0<2)$，

所以 $y_0^2=4-\frac{x_0^2}{4}$，$y_0=\sqrt{4-\frac{x_0^2}{4}}=\frac{\sqrt{16-x_0^2}}{2}$，

所以 $\frac{8x_0^2-16x_0y_0+32x_0}{2x_0-2y_0^2-x_0y_0+8}=\frac{8x_0^2-16x_0\cdot\frac{\sqrt{16-x_0^2}}{2}+32x_0}{2x_0-2\left(4-\frac{x_0^2}{4}\right)-x_0\cdot\frac{\sqrt{16-x_0^2}}{2}+8}=\frac{8x_0^2-8x_0\cdot\sqrt{16-x_0^2}+32x_0}{\frac{1}{2}x_0^2-\frac{1}{2}x_0\cdot\sqrt{16-x_0^2}+2x_0}=$

$\frac{16\left(\frac{1}{2}x_0^2-\frac{1}{2}x_0\cdot\sqrt{16-x_0^2}+2x_0\right)}{\frac{1}{2}x_0^2-\frac{1}{2}x_0\cdot\sqrt{16-x_0^2}+2x_0}=16$，得证. ………………………………………… 12 分

(方法二)证明：由题意可得 $B(4,0)$，$C(0,2)$，

所以直线 $BC$ 的方程的截距式为 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$，

即为 $x+2y-4=0$. …………………………………………………………………… 5 分

设直线 $AP$ 的斜率为 $k$，点 $P$ 的坐标为 $(x_P,y_P)$，

则 $AP$ 的方程为 $y=k(x+4)$，

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1,\\ y=k(x+4),\end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2+32k^2x+64k^2-16=0$，

所以 $(-4)x_P=\dfrac{64k^2-16}{1+4k^2}$，即 $x_P=\dfrac{4-16k^2}{1+4k^2}$，$y_P=k(x_P+4)=\dfrac{8k}{1+4k^2}$.

所以 $P\left(\dfrac{4-16k^2}{1+4k^2},\dfrac{8k}{1+4k^2}\right)\left(0<k<\dfrac{1}{2}\right)$. …………………………………… 8 分

直线 $CP$ 的方程为 $y=\dfrac{y_P-2}{x_P}x+2$，

设点 $M,Q$ 的坐标分别为 $(x_M,0)$，$(x_Q,y_Q)$，

在 $y=\dfrac{y_P-2}{x_P}x+2$ 中，令 $y=0$ 得 $x_M=\dfrac{-2x_P}{y_P-2}=\dfrac{4(1+2k)}{1-2k}$. ……………………………… 10 分

解 $\begin{cases}x+2y-4=0,\\ y=k(x+4),\end{cases}$ 得 $x_Q=\dfrac{4(1-2k)}{1+2k}$.

所以 $S_1\cdot S_2=\dfrac{4(1-2k)}{1+2k}\cdot\dfrac{4(1+2k)}{1-2k}=16$. …………………………………… 12 分

22. (1)解：根据题意，若函数 $f(x)=x^3$ 为"恒切函数"，切点为 $(x_0,y_0)$，

则 $\begin{cases}f(x_0)+kx_0+b=kx_0+b,\\ f'(x_0)+k=k,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}f(x_0)=0,\\ f'(x_0)=0,\end{cases}$

对于函数 $f(x)=x^3$，$f'(x)=3x^2$，所以 $\begin{cases}x_0^3=0,\\ 3x_0^2=0,\end{cases}$ 解得 $x_0=0$. 因此，函数 $f(x)=x^3$ 是"恒切函数"； … 4 分

(2)证明：根据题意，函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-x-1)e^x+m$ 是"恒切函数"，设切点为 $(x_0,y_0)$，

由 $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-x-1)e^x+m$，可得 $f'(x)=\dfrac{1}{2}(2e^x-x-2)e^x$，

则有 $\begin{cases}\dfrac{1}{2}(e^{x_0}-x_0-1)e^{x_0}+m=0,\\ \dfrac{1}{2}(2e^{x_0}-x_0-2)e^{x_0}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m=-\dfrac{1}{2}(e^{x_0}-x_0-1)e^{x_0},\\ 2e^{x_0}=x_0+2,\end{cases}$

考查方程 $2e^x=x+2$ 的解，

设 $g(x)=2e^x-x-2$，因为 $g'(x)=2e^x-1$，令 $g'(x)=0$，得 $x=-\ln 2$. …………………………… 7 分

当 $x\in(-\infty,-\ln 2)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(-\ln 2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$.

所以，函数 $y=g(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-\ln 2)$，单调递增区间为 $(-\ln 2,+\infty)$.

所以 $g(x)_{\min}=g(-\ln 2)=\ln 2-1<0$. ………………………………………………………… 9 分

(ⅰ)当 $x\in(-\infty,-\ln 2)$ 时，因为 $g(-2)=\dfrac{2}{e^2}>0$，$g(-1)=\dfrac{2}{e}-1<0$，

所以，函数 $y=g(x)$ 在区间 $(-\infty,-\ln 2)$ 上存在唯一零点 $x_0\in(-2,-1)$.

又因为 $m=-\dfrac{1}{2}(e^{x_0}-x_0-1)e^{x_0}=\dfrac{1}{8}x_0(x_0+2)=\dfrac{1}{8}(x_0+1)^2-\dfrac{1}{8}\in\left(-\dfrac{1}{8},0\right)$； …………………… 11 分

(ⅱ)当 $x\in(-\ln 2,+\infty)$ 时，因为 $g(0)=0$，所以函数 $y=g(x)$ 在区间 $(-\ln 2,+\infty)$ 上有唯一零点，则 $m=0$

综上所述，$-\dfrac{1}{8}<m\leqslant 0$. ……………………………………………………………… 12 分

数学双向细目表

| 主题(模块) | 分值 | 题序 | 题型 | 考查内容 | 分值 | 预估难度 | 预估得分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 集合 | 5 | 1 | 单选题 | 考查集合的运算 | 5 | 0.85 | 4.5 |
| 复数 | 5 | 2 | 单选题 | 考查复数的基本运算,模的公式 | 5 | 0.8 | 4 |
| 常用逻辑用语 | 5 | 3 | 单选题 | 考查常用逻辑用语,充分、必要、充要条件 | 5 | 0.65 | 3 |
| 向量 | 5 | 4 | 单选题 | 考查条件概率 | 5 | 0.65 | 3.3 |
| 不等式 | 5 | 5 | 单选题 | 考查向量数量积的定义 | 5 | 0.6 | 3 |
| 解析几何 | 22 | 6 | 单选题 | 考查三角函数的图象与性质、二倍角公式 | 5 | 0.5 | 2.5 |
| 三角部分 | 17 | 7 | 单选题 | 考查函数的性质,直线与圆 | 5 | 0.4 | 2 |
| 概率统计 | 25 | 8 | 单选题 | 考查函数的性质,导数在函数中的应用 | 5 | 0.31 | 1.6 |
| 数列 | 12 | 9 | 多选题 | 考查统计,频率分布直方图 | 5 | 0.8 | 4 |
| 立体几何 | 22 | 10 | 多选题 | 考查不等式 | 5 | 0.7 | 3.5 |
| 函数与导数 | 27 | 11 | 多选题 | 考查空间几何体中线、面位置关系,内切球问题 | 5 | 0.65 | 3.3 |
| 满分 | 150 | 12 | 多选题 | 考查抛物线的定义及性质 | 5 | 0.52 | 2.6 |
| | | 13 | 填空题 | 考查函数的值域 | 5 | 0.7 | 3 |
| | | 14 | 填空题 | 考查计数原理 | 5 | 0.7 | 3 |
| | | 15 | 填空题 | 考查双曲线的性质,双曲线的离心率 | 5 | 0.6 | 3 |
| | | 16 | 填空题 | 考查空间几何体中的外接球 | 5 | 0.4 | 2 |
| | | 17 | 解答题 | 考查列联表、独立性检验以及离散型随机变量期望的求解 | 10 | 0.7 | 7.6 |
| | | 18 | 解答题 | 考查解三角形 | 12 | 0.65 | 8 |
| | | 19 | 解答题 | 考查等差、等比数列,数列的前 $n$ 项和 | 12 | 0.65 | 8 |
| | | 20 | 解答题 | 考查空间中线线、线面、面面间的位置关系以及二面角的余弦值的求法 | 12 | 0.5 | 6 |
| | | 21 | 解答题 | 考查椭圆标准方程和直线与椭圆综合运用 | 12 | 0.5 | 7 |
| | | 22 | 解答题 | 考查利用导数研究函数的单调性、极值和最值、函数与方程的关系、转化思想 | 12 | 0.5 | 6 |
| | | | | 总体难度系数 | 0.59 | 平均得分 | 94.6 |

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。