

则  $C(2,2,0)$ ,  $P(0,0,3)$ ,  $D(0,3,0)$ ,  $N(2,1,0)$ ,

$\therefore \overrightarrow{PC} = (2, 2, -3)$ ,  $\overrightarrow{PD} = (0, 3, -3)$ ,  $\overrightarrow{DN} = (2, -2, 0)$ ,

设平面  $CPD$  的法向量  $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,

$$\begin{cases} \overrightarrow{PC} \cdot \vec{n}_1 = 2x_1 + 2y_1 - 3z_1 = 0 \\ \overrightarrow{PD} \cdot \vec{n}_1 = 3y_1 - 3z_1 = 0 \end{cases}$$

令  $z_1 = 2$ , 解得  $y_1 = 2$ ,  $x_1 = 1$ ,  $\therefore \vec{n}_1 = (1, 2, 2)$ ;

设平面  $NPD$  的法向量  $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ,

$$\begin{cases} \overrightarrow{DN} \cdot \vec{n}_2 = 2x_2 - 2y_2 = 0 \\ \overrightarrow{PD} \cdot \vec{n}_2 = 3y_2 - 3z_2 = 0 \end{cases}$$

令  $x_2 = 1$ , 解得  $y_2 = 1$ ,  $z_2 = 1$ ,  $\therefore \vec{n}_2 = (1, 1, 1)$ ;

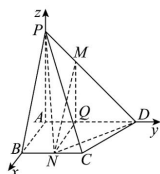
$$\therefore |\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{5}{3\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{9},$$

$\therefore$  平面  $CPD$  与平面  $NPD$  所成角的正弦值为  $\sqrt{1 - \left(\frac{5\sqrt{3}}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{9}$ .

19. “每天锻炼一小时，健康工作五十年，幸福生活一辈子。”一科研单位为了了解员工爱好运动是否与性别有关，从单位随机抽取 30 名员工进行了问卷调查，得到了如下列联表：

|     | 男性 | 女性 | 合计 |
|-----|----|----|----|
| 爱好  | 10 |    |    |
| 不爱好 |    | 8  |    |
| 合计  |    |    | 30 |

已知在这 30 人中随机抽取 1 人抽到爱好运动的员工的概率是  $\frac{8}{15}$ .



参考公式:  $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ,  $n = a + b + c + d$ .

附表:

| $\alpha$          | 0.100 | 0.050 | 0.010 | 0.005 | 0.001  |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $\chi_{\alpha}^2$ | 2.706 | 3.841 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

(1) 请将上面的列联表补充完整，根据小概率值  $\alpha = 0.05$  的独立性检验，分析爱好运动与否与性别是否有关？

(2) 若从这 30 人中的女性员工中随机抽取 2 人参加一活动，记爱好运动的人数为  $X$ ，求  $X$  的分布列、数学期望。

19. (1) 由 30 人中随机抽取 1 人抽到爱好运动的员工的概率是  $\frac{8}{15}$ , 故爱好运动的员工共有 16 人,

由表中男爱好运动的员工为 10 人, 可得女爱好运动的员工有 6 人,

故列联表补充如下:

|     | 男性 | 女性 | 合计 |
|-----|----|----|----|
| 爱好  | 10 | 6  | 16 |
| 不爱好 | 6  | 8  | 14 |
| 合计  | 16 | 14 | 30 |

零假设为  $H_0$ : 爱好运动与否与性别没有关系.

由已知数据可得:

$$\chi^2 = \frac{30 \times (10 \times 8 - 6 \times 6)^2}{16 \times 14 \times 16 \times 14} \approx 1.158 < 3.841 = \chi_{0.05}^2,$$

根据小概率值  $\alpha = 0.05$  的独立性检验, 没有充分证据推断  $H_0$  不成立, 即接受  $H_0$ , 即认为爱好运动与否与性别没有关系;

(2)  $X$  的可能取值为 0, 1, 2.

$$P(X=0) = \frac{C_4^2}{C_{14}^2} = \frac{4}{91}, \quad P(X=1) = \frac{C_6^1 C_8^1}{C_{14}^2} = \frac{48}{91},$$

$$P(X=2) = \frac{C_6^2}{C_{14}^2} = \frac{15}{91}.$$



所以  $X$  的分布列为：

|     |                |                 |                 |
|-----|----------------|-----------------|-----------------|
| $X$ | 0              | 1               | 2               |
| $P$ | $\frac{4}{13}$ | $\frac{48}{91}$ | $\frac{15}{91}$ |

$X$  的数学期望为：

$$E(X) = 0 \times \frac{4}{13} + 1 \times \frac{48}{91} + 2 \times \frac{15}{91} = \frac{6}{7}$$

20. 已知椭圆  $C$  的中心在原点，焦点在  $x$  轴上，长轴长为 4，且点  $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$  在椭圆  $C$  上.

(1) 求椭圆  $C$  的方程；

(2) 设  $P$  是椭圆  $C$  长轴上的一个动点，过  $P$  作方向向量  $\vec{d} = (2, 1)$  的直线  $l$  交椭圆  $C$  于  $A, B$  两点，求证： $|PA|^2 + |PB|^2$  为定值.

20. (1) 因为  $C$  的焦点在  $x$  轴上且长轴为 4，

故可设椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ )， (1 分)

因为点  $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$  在椭圆  $C$  上，所以  $\frac{1}{4} + \frac{3}{4b^2} = 1$ ， (2 分)

解得  $b^2 = 1$ ， (1 分)

所以，椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 。 (2 分)

(2) 设  $P(m, 0)$  ( $-2 \leq m \leq 2$ )，由已知，直线  $l$  的方程是  $y = \frac{x-m}{2}$ ， (1 分)

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}(x-m) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0 \quad (*) \quad (2 \text{ 分})$$

设  $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，则  $x_1, x_2$  是方程  $(*)$  的两个根，

$$\text{所以有， } x_1 + x_2 = m, x_1 x_2 = \frac{m^2 - 4}{2}, \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{所以， } |PA|^2 + |PB|^2 = (x_1 - m)^2 + y_1^2 + (x_2 - m)^2 + y_2^2$$

$$= (x_1 - m)^2 + \frac{1}{4}(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + \frac{1}{4}(x_2 - m)^2 = \frac{5}{4}[(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2]$$

$$= \frac{5}{4}[x_1^2 + x_2^2 - 2m(x_1 + x_2) + 2m^2] = \frac{5}{4}[(x_1 + x_2)^2 - 2m(x_1 + x_2) - 2x_1 x_2 + 2m^2]$$

$$= \frac{5}{4}[m^2 - 2m^2 - (m^2 - 4) + 2m^2] = 5 \quad (\text{定值}). \quad (3 \text{ 分})$$

所以， $|PA|^2 + |PB|^2$  为定值。 (1 分)

21. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$ 。

(1) 若  $f(x)$  在  $(2, +\infty)$  上单调递减，求实数  $a$  的取值范围；

(2) 若  $a > 2$  时， $f(x)$  存在两个极值点  $x_1, x_2$ ，证明： $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$ 。

21. (1) 解：因为  $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$ ，则  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{a}{x} = -\frac{x^2 - ax + 1}{x^2}$ ，

因为函数  $f(x)$  在  $(2, +\infty)$  上单调递减，则对任意的  $x > 2$ ， $f'(x) \leq 0$ ，

即  $\frac{a}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} \leq 0$ ，可得  $a \leq x + \frac{1}{x}$ ，

设  $h(x) = x + \frac{1}{x}$ , 则  $h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ ,

当  $x > 2$  时,  $h'(x) > 0$ , 所以,  $h(x)$  单调递增, 则  $h(x) > h(2) = \frac{5}{2}$ , 故  $a \leq \frac{5}{2}$ ,

即实数  $a$  的取值范围是  $(-\infty, \frac{5}{2}]$ .

(2) 证明: 由 (1) 知:  $x_1, x_2$  满足  $x^2 - ax + 1 = 0$ , 则  $x_1 x_2 = 1$ ,

不妨设  $0 < x_1 < x_2$ , 则  $x_2 > 1$ .

则  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{x_1 x_2} - 1 + a \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = -2 + a \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = -2 + a \frac{-2 \ln x_2}{\frac{1}{x_2} - x_2}$ ,

则要证  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$ , 即证  $\frac{-2a \ln x_2}{\frac{1}{x_2} - x_2} < a$ ,

即证  $2 \ln x_2 < x_2 - \frac{1}{x_2}$ , 也即证  $\frac{1}{x_2} - x_2 + 2 \ln x_2 < 0$  成立.

设函数  $g(x) = \frac{1}{x} - x + 2 \ln x$ , 则  $g'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{2}{x} = -\frac{(x-1)^2}{x^2} < 0$ ,

所以,  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递减, 又  $g(1) = 0$ .

故当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $g(x) < g(1) = 0$ ,

所以,  $x_2 - \frac{1}{x_2} + 2 \ln x_2 < 0$ , 即  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$ .

22. 习近平总书记在党的十九大报告中指出, 要在“幼有所育、学有所教、劳有所得、病有所医、老有所养、住有所居、弱有所扶”上不断取得新进展, 保证全体人民在共建共享发展中有更多获得感. 现 S 市政府针对全市 10 所由市政财政投资建设的敬老院进行了满意度测评, 得到数据如下表:

|     |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 敬老院 | A | B | C | D | E | F | G | H | I | K |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

|              |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 满意度 $x$ (%)  | 20 | 34 | 25 | 19 | 26 | 20 | 19 | 24 | 19 | 13 |
| 投资额 $y$ (万元) | 80 | 89 | 89 | 78 | 75 | 71 | 65 | 62 | 60 | 52 |

(1) 求投资额  $y$  关于满意度  $x$  的相关系数;

(2) 我们约定: 投资额  $y$  关于满意度  $x$  的相关系数  $r$  的绝对值在 0.75 以上 (含 0.75) 是线性相关性较强, 否则, 线性相关性较弱. 如果没有达到较强线性相关, 则采取“末位淘汰”制 (即满意度最低的敬老院市政不再继续投资, 改为区财政投资). 求在剔除“末位淘汰”的敬老院后投资额  $y$  关于满意度  $x$  的线性回归方程 (系数精确到 0.1)

参考数据:  $\bar{x} = 21.9, \bar{y} = 72.1, \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10\bar{x}^2 = 288.9, \sqrt{\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - 10\bar{y}^2} \approx 37.16$ ,

$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10\bar{x} \cdot \bar{y} = 452.1, \sqrt{288.9} \approx 17$ .

附: 对于一组数据  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , 其回归直线  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$  的斜率和截距的最小二乘估计

公式分别为:  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ . 线性相关系数  $r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2)}}$

22. (1) 由题意, 根据相关系数的公式, 可得

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10\bar{x}^2)(\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - 10\bar{y}^2)}} \approx \frac{452.1}{17 \times 37.16} \approx 0.72.$$

(2) 由 (1) 可知, 因为  $0.72 < 0.75$ , 所以投资额  $y$  关于满意度  $x$  没有达到较强线性相关,

所以要“末位淘汰”掉 K 敬老院.

重新计算得  $\bar{x} = \frac{21.9 \times 10 - 13}{9} = \frac{206}{9} \approx 22.89, \bar{y} = \frac{72.1 \times 10 - 52}{9} = \frac{669}{9} \approx 74.33$ ,

$\sum_{i=1}^9 x_i^2 - 9\bar{x}^2 \approx 288.9 + 10 \times 21.9^2 - 13^2 - 9 \times 22.89^2 \approx 200.43$ ,

$\sum_{i=1}^9 x_i y_i - 9\bar{x} \cdot \bar{y} \approx 452.1 + 10 \times 21.9 \times 72.1 - 13 \times 52 - 9 \times 22.89 \times 74.33 \approx 253.28$ ,

所以  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^9 x_i y_i - 9\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^9 x_i^2 - 9\bar{x}^2} \approx \frac{253.28}{200.43} \approx 1.26 \approx 1.3$ ,

$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \approx 74.33 - 1.26 \times 22.89 \approx 45.49 \approx 45.5$ .

所以所求线性回归方程为 $\hat{y} = 1.3x + 45.5$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线

