数　学（文科）

本试卷共4页，23题（含选考题）。全卷满分150分，考试时间120分钟。

考生注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用2B铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内，写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

5. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $M=\left\{x\left|x\left(x-\frac{1}{2}\right)\geqslant 0\right.\right\}$，$N=\{x\,|\,\lg x<0\}$，则 $M\cap N=$

A. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $\left[\frac{1}{2},1\right)$　　C. $(0,1)$　　D. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$

2. 若复数 z 满足 $2z\cdot\mathrm{i}=1+3\mathrm{i}$（$\mathrm{i}$ 是虚数单位），则 $z=$

A. $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　B. $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　C. $-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. $-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

3. 函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(-x),-1\leqslant x<0\\ \mathrm{e}^{ax},0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$（$a\in\mathbf{R}$，e 是自然对数的底数）且 $f(1)=2$，则 $f\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)-f(\log_4 3)=$

A. $-1-\sqrt{3}$　　B. $-1+\sqrt{3}$　　C. $1-\sqrt{3}$　　D. $1+\sqrt{3}$

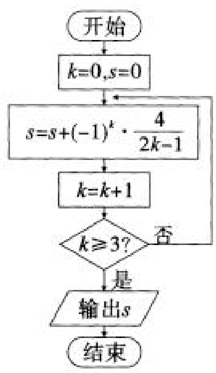
4. 若直线 $y=mx-1$ 被圆 $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ 截得的弦长是 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，则实数 $m=$

A. $\pm\sqrt{19}$　　B. $\pm\frac{\sqrt{21}}{3}$　　C. $\pm\frac{\sqrt{11}}{3}$　　D. ± 2

5. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$\frac{2}{a_n}=\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_{n+1}}$（$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 2$），且 $a_{2020}=\frac{2}{3}$，$a_{2022}=\frac{2}{5}$，则 $a_{2023}=$

A. $\frac{7}{2}$　　B. $\frac{2}{7}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 3

6. 执行如图所示的程序框图，则输出 s 的值为



A. -4　　B. -8　　C. $-\frac{20}{3}$　　D. $-\frac{112}{15}$

7. 某校对数学特长生进行了一次培训，培训结束后进行了一次考核. 为了解本次培训活动的效果，从 A、B 两个实验班随机各抽取 10 名学生的考核成绩，如茎叶图所示. 将学生的考核成绩分为两个等级，如下表所示. 现从样本考核等级为优秀的学生中任取两人，则两人来自同一实验班的概率是

A		B
4	6	2 7
5 8 8 9 2	7	8 9 0
5 6	8	5 4 7
1 2	9	3 5

考核成绩	[60,85]	[86,100]
考核等级	合格	优秀

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{2}{5}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{1}{5}$

8. 已知圆锥的顶点为 A，过母线 AB、AC 的截面面积是 $2\sqrt{3}$. 若 AB、AC 的夹角是 60°，且 AC 与圆锥底面所成的角是 30°，则该圆锥的表面积是

A. $2\sqrt{2}\pi$　　B. $(2\sqrt{3}+6)\pi$　　C. $(4\sqrt{2}+6)\pi$　　D. $(4\sqrt{3}+6)\pi$

9. 设 $\omega>0$，将函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)+4$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3\omega}$ 个单位长度，再向下平移 4 个单位长度，得到函数 $y=g(x)$ 的图象. 若 $g(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增，在区间 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12}\right)$ 上单调递减，则 $\omega=$

A. $6k-\frac{3}{2}, k\in\mathbf{N}$　　B. $6k+\frac{3}{2}, k\in\mathbf{N}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 3

10. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，向量 $\boldsymbol{m}=(2b+c,\sin C)$，向量 $\boldsymbol{n}=(\sin B,2c+b)$，且满足 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2a\sin A$. 则角 $A=$

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

11. 设 $a\in\mathbf{R}$，e 为自然对数的底数，函数 $f(x)=e^x-a\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 内有且仅有一个零点，则 $a=$

A. e^{π}　　B. -1　　C. $e^{\frac{\pi}{4}}$　　D. $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

12. 斜率为 k 的直线 l 与抛物线 $C:y^2=3x$ 交于 A,B 两点，若 $|AF|+|BF|=4$，则 k 的取值范围是

A. $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{15}}{5},+\infty\right)$　　B. $\left(-\frac{\sqrt{15}}{5},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$

C. $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{15}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{15}}{3},+\infty\right)$　　D. $\left(-\frac{\sqrt{15}}{3},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{15}}{3}\right)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若一组数据 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的平均数是 30，另一组数据 $x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,\cdots,x_n+y_n$ 的平均数是 70，则第三组数据 $4y_1+1,4y_2+1,4y_3+1,\cdots,4y_n+1$ 的平均数是________.

14. 若直线 $\sqrt{2}x-2y=0$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两交点在 x 轴上的射影落在该双曲线的两个焦点上，则该双曲线的离心率是________.

15. 设点 O 是 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心，$AB=3$，且 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=-4$. 则 $\frac{\sin B}{\sin C}$ 的值是________.

16. 如图 1，在一个正方形 $S_1S_2S_3S_4$ 内，有一个小正方形和四个全等的等边三角形. 将四个等边三角形折起来，使 S_1,S_2,S_3,S_4 重合于点 S，且折叠后的四棱锥 $S-ABCD$ 的外接球的表面积是 16π（如图 2），则四棱锥 $S-ABCD$ 的体积是________.

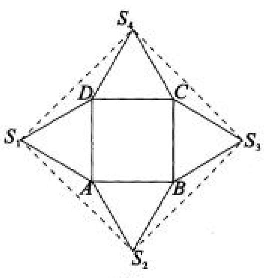


图1

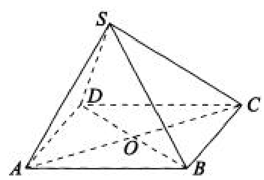


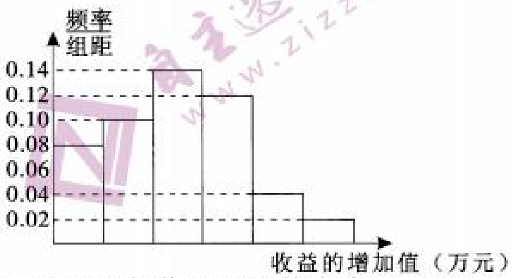
图2

三. 解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22,23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

为响应习近平总书记在党的十九大报告中提出的“绿水青山就是金山银山”的号召，某市旅游局筹划共投入 4 千万元，对全市各旅游景区的环境进行综合治理，并且对各旅游景区收益的增加值作了初步的估计. 根据旅游局的治理规划方案，针对各旅游景区在治理后收益的增加值绘制出如图所示频率分布直方图，由于操作失误，横轴的数据丢失，但可以确定横轴是从 0 开始计数的.



（1）旅游局在投入 4 千万元的治理经费下，估计全市旅游景区收益增加值的平均数为多少万元（以各组的区间中点值代表该组的取值）；

（2）若旅游局投入不同数额的经费，按照以上的研究方法，得到以下数据：

投入的治理经费 x（单位：千万元）	1	2	3	4	5	6	7
收益的增加值 y（单位：万元）	2	3	2		7	7	9

将第（1）问结果填入表格后，数据显示 x 与 y 之间存在线性相关关系. 在优化环境的同时，旅游局还谋划使全市旅游景区收益的总额至少增加 10 万元，试估计在此目标下，旅游局应该对全市旅游景区至少投入多少千万元的治理经费？（答案精确到 0.01）.

参考公式：回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot y_i)-n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2},\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.$$

18.（12 分）

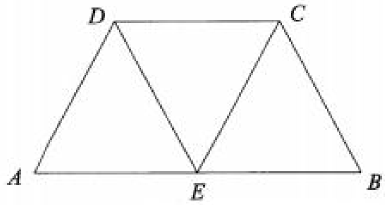
已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$a_{n+1}=mS_n+1(n\in\mathbf{N}^*,m\in\mathbf{R}$ 且 $m\neq-1)$.

（1）证明：$\{a_n\}$ 是等比数列；

（2）若 $S_6=9S_3$，求 m 的值和数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

19.（12 分）

在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$AB=2DC$，E 为 AB 的中点，将 $\triangle ADE$ 与 $\triangle BEC$ 分别沿 ED、EC 向上折起，使 A、B 重合于点 P.



（1）在折后的三棱锥 $P—DCE$ 中，证明：$PE\perp CD$；

（2）若 $\angle DEC=60°$，且折后的三棱锥 $P—DCE$ 的表面积是 $\sqrt{3}$，求三棱锥 $P—DCE$ 的体积.

20. (12 分)

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，点 F 是椭圆 E 的左焦点，点 A 为椭圆 E 的右顶点，点 B 为椭圆 E 的上顶点，且 $S_{\triangle ABF}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 设点 $P(m,0)$ 为椭圆 E 长轴上的一个动点，过点 P 作斜率为 $\frac{b}{a}$ 的直线 l 交椭圆 E 于 S,T 两点，证明：$|PS|^2+|PT|^2$ 为定值.

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2-x$，其中 $a\geqslant 0$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若当 $x>2$ 时，$f(x)<\frac{1}{2}x^3+1$ 恒成立，求 a 的取值范围.

(二) 选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题做答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. (10 分) **选修 4-4：坐标系与参数方程**

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos^k t\\ y=3\sin^k t\end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为极点，x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系，且在两坐标系下长度单位相同. 曲线 C_2 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta-8\rho\sin\theta+5=0$.

(1) 当 $k=1$ 时，C_1 是什么曲线？

(2) 当 $k=4$ 时，求 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标.

23. (10 分) **选修 4-5：不等式选讲**

设 $a\in\mathbf{R}$，$f(x)=|x-3|-|x+a|$.

(1) 当 $a=2$ 时，解不等式 $f(x)>1$；

(2) 若对于任意实数 x，不等式 $f(x)\leqslant 2a$ 恒成立，求 a 的取值范围.

文科数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	A	D	C	C	B	D	C	C	D	A

1.【解析】因为 $M=\left\{x \middle| x\le 0\text{或}x\ge\frac{1}{2}\right\}, N=\{x|0<x<1\}$，所以 $M\cap N=\left\{x\middle|\frac{1}{2}\le x<1\right\}=\left[\frac{1}{2},1\right)$.

2.【解析】$z=\frac{1+3i}{2i}=\frac{(1+3i)\cdot i}{-2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$，故选 A.

3.【解析】由 $f(1)=2, a=\ln 2, f(x)=\begin{cases}\ln(-x), & -1\le x<0,\\ e^{x\ln 2}, & 0\le x\le 1,\end{cases}$ 即 $f(x)=\begin{cases}\ln(-x), & -1\le x<0,\\ 2^x, & 0\le x\le 1,\end{cases}$

于是 $f(-\frac{1}{e})-f(\log_4 3)=\ln\frac{1}{e}-2^{\log_4 3}=-1-\sqrt{3}$.

4.【解析】直线方程为 $mx-y-1=0$. 圆心 $(0,0)$ 到直线的距离是 $d=\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$.

于是 $(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}})^2+(\frac{\sqrt{5}}{10})^2=\frac{1}{4}, m=\pm 2$.

5.【解析】由条件知，数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列，则其公差 $d=\frac{1}{2}(\frac{1}{a_{2022}}-\frac{1}{a_{2020}})=\frac{1}{2}$.

因此 $\frac{1}{a_{2023}}=\frac{1}{a_{2022}}+d=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3,, a_{2023}=\frac{1}{3}$.

6.【解析】$k=0$ 时，$s=-4$；$k=1$ 时，$s=-4-4=-8$；$k=2$ 时，$s=-8+\frac{4}{3}=-\frac{20}{3}$；

$k+1=3\ge 3$ 时. 此时退出循环，输出的 $s=-\frac{20}{3}$.

7.【解析】记事件 M 为“从样本考核等级为优秀的学生中任取两人，且两人来自同一实验班”.

样本中，A 班考核等级为优秀的学生共有 3 人，分别记为 a,b,c，B 班考核等级为优秀的学生共有 3 人，分别记为 A,B,C，从这 6 人中任取 2 人，所有的基本事件个数为 $ab,ac,aA,aB,aC,bc,bA,bB,bC,cA,cB,cC,AB,AC,BC$ 共 15 中,而事件 M 包含的基本事件是 ab,ac,bc,AB,AC,BC 共 6 种，因此 $P(M)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$. 故选 B.

8.【解析】设圆锥的母线长是l，则$\frac{1}{2}l^2\cdot\sin 60^\circ=2\sqrt{3}, l=2\sqrt{2}.$ 则高是$\sqrt{2}$，圆锥底面半径是$2\sqrt{2}\times\cos 30^\circ=\sqrt{6}$.于是该圆锥的表面积是$\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{2}+\pi\cdot(\sqrt{6})^2=(4\sqrt{3}+6)\pi.$

9.【解析】由题意知，$g(x)=\sin(\omega x).$ 当$x=\frac{\pi}{3}$时，函数$g(x)$取得最大值，所以$\frac{\pi}{3}\cdot\omega=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z.$ 解得$\omega=6k+\frac{3}{2},k\in N.$ 因为$g(x)$在区间$\left(-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$上递增，在$\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{12}\right)$上递减，所以$\frac{\pi}{\omega}\geq\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}$且$\frac{\pi}{\omega}\geq\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{3}$，解得$0<\omega\leq\frac{12}{5}.$ 因此$\omega=\frac{3}{2}$.

10.【解析】由已知$\vec{m}\cdot\vec{n}=2a\sin A$，得$2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$.再根据正弦定理有,$2a^2=(2b+c)b+(2c+b)c$,即$a^2=b^2+c^2+bc$.由余弦定理得，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$\cos A=-\frac{1}{2}$, 因为$A\in(0,\pi)$,所以$A=\frac{2\pi}{3}$.

11.【解析】由$e^x-a\sin x=0$得，$a\sin x=e^x$. 因为$x\in(0,\pi)$，所以$\sin x>0$. 因此$a=\frac{e^x}{\sin x}$.

令$g(x)=\frac{e^x}{\sin x},0<x<\pi$,则$g'(x)=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}$. 由$g'(x)=0$得$x=\frac{\pi}{4}$.

当$0<x<\frac{\pi}{4}$时$g'(x)<0$；当$\frac{\pi}{4}<x<\pi$时$g'(x)>0$，所以$g(x)_{\min}=g(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$.

因此$a=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$.

12.【解析】联立$\begin{cases}y=kx+b\\ y^2=3x\end{cases}$消去$y$，化简整理得$k^2x^2+(2kb-3)x+b^2=0$.

由$\Delta=(2kb-3)^2-4\times k^2b^2>0$得，$12kb<9$，$kb<\frac{3}{4}$. 因为$|AF|+|BF|=4$，所以$x_1+x_2+\frac{3}{2}=4$，即$x_1+x_2=\frac{5}{2}$. 而$x_1+x_2=-\frac{2kb-3}{k^2}$，即$-\frac{2kb-3}{k^2}=\frac{5}{2}$，解得$b=\frac{6-5k^2}{4k}$.

代入$kb<\frac{3}{4}$得到，$k\cdot\frac{6-5k^2}{4k}<\frac{3}{4}$，$k<-\frac{\sqrt{15}}{5}$或$k>\frac{\sqrt{15}}{5}$.

13.【答案】161【解析】数据 $x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,\cdots,x_n+y_n$ 共有 n 个，其平均数为

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=30+\overline{y}=70.$ 因此 $\overline{y}=40.$

故数据 $4y_1+1,4y_2+1,\cdots,4y_n+1$ 的平均数是 $4\times40+1=161.$

14.【答案】$\sqrt{2}$【解析】将 $x=c$ 代入 $\sqrt{2}x-2y=0$ 中，$y=\frac{\sqrt{2}}{2}c$. 所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}c=\frac{b^2}{a}$,

即 $\frac{\sqrt{2}}{2}ac=c^2-a^2,e^2-\frac{\sqrt{2}}{2}e-1=0,e=\sqrt{2}$.

15.【答案】$\frac{1}{3}$【解析】设点 D 是边 BC 的中点，则

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2)$

即 $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2-9)=-4,\overrightarrow{AC}^2=1$. 故 $\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{3}.$

16.【答案】$\frac{16}{3}$【解析】在图 4 中，连接 AC,BD 交于点 O, 则 O 是正四棱锥外接球的球心，正四棱锥的所有棱都相等，设其为 x, 则外接球的半径是 $OA=\frac{\sqrt{2}}{2}x$, 所以 $4\pi(\frac{\sqrt{2}}{2}x)^2=16\pi$，$x=2\sqrt{2}$. 因此 $SO=OA=\frac{\sqrt{2}}{2}x=2$. 故四棱锥 $S-ABCD$ 的体积

$\frac{1}{3}\cdot x^2\cdot SO=\frac{1}{3}\times(2\sqrt{2})^2\times2=\frac{16}{3}.$

17.【解析】(1) 设各小长方形的宽度为 m，由频率分布直方图中各小长方形面积总和为 1 可得,

$(0.08+0.10+0.14+0.12+0.04+0.02)m=1$. 解得 $m=2$. ……………………………2 分

各小组依次是 $[0,2),[2,4),[4,6),[6,8),[8,10),[10,12]$, 其中点分别是 $1,3,5,7,9,11$, 对应的频率分别为 $,0.16,0.20,0.28,0.24,0.08,0.04$，故估计全市家庭年均用气量为

$1\times0.16+3\times0.2+5\times0.28+7\times0.24+9\times0.08+11\times0.04=5$（立方米）. ……………………4 分

(2) 空白栏中填 5.

由题意可知，$\overline{x}=\frac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$，$\overline{y}=\frac{2+3+2+5+7+7+9}{7}=5$

$\sum_{i=1}^{7}x_iy_i=1\times2+2\times3+3\times2+4\times5+5\times7+6\times7+7\times9=174$，

$\sum_{i=1}^{7}x_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2=140$．根据公式可求得，

$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}=\dfrac{174-7\times4\times5}{140-7\times4^2}=1.214$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=5-1.214\times4\approx0.144$．所以

回归直线方程为 $\hat{y}=1.214x+0.144$． ……………………………………………10 分

当 $\hat{y}=10$ 时，$10=1.214x+0.144,x\approx8.12$．

即旅游局对全市旅游景区至少投入8.12千万元的治理经费． ……………………………12 分

18.【解析】(1) 因为 $a_{n+1}=mS_n+1(n\in N^*)$，所以当 $n\geq2$ 时，$a_n=mS_{n-1}+1$，

两式相减得，$a_{n+1}-a_n=mS_n-mS_{n-1},a_{n+1}-a_n=ma_n,a_{n+1}=(m+1)a_n(n\geq2)$.…………………4 分

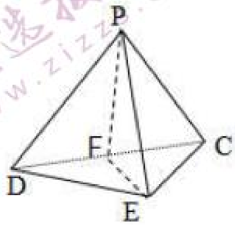
在 $a_{n+1}=mS_n+1$ 中，令 $n=1$，则 $a_2=(m+1)a_1$，$n=1$ 也适合上式， 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为1、公比为 $(m+1)$ 的等比数列. ……………………………………………………………6 分

(2) 由 (1) 知，$a_n=(m+1)^{n-1},n\in N^*$.

令 $m+1=q$，显然 q≠1，由 $9S_3=S_6$ 得，$\dfrac{9(1-q^3)}{1-q}=\dfrac{1-q^6}{1-q}$，解得 $q=2$． …………………10 分

故 $m=1$，$\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=2^{n-1},n\in N^*$． ……………………………………12 分

19.【解析】(1) 折后的三棱锥 P—DCE 如图所示．取线段 CD 的中点 F．



连接 PF,EF．在 ΔPDC 中，$PD=PC$，F 是 CD 的中点，

所以 $PF\perp CD$．

在 ΔEDC 中，$ED=EC$，F 是 CD 的中点，

所以 $EF\perp CD$． 而 $EF\cap PF=F$， ………………………3 分

所以 $CD\perp$ 平面 PEF．而 $PE\subset$ 平面 PEF，所以 $PE\perp CD$． ……………………………6 分

(2) 当 $\angle DEC=60^\circ$ 时，三棱锥 P—DCE 是正四面体，设其棱长为 a．

由 $4\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\sqrt{3}$ 解得 $a=1$． ………………………………………………………8 分

则 $PF=EF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$S_{\Delta PEF}=\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2-(\dfrac{1}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$．

故三棱锥 P—DCE 的体积为 $2V_{D-PEF}=2\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{12}$. ……………………………12 分

20.【解析】(1) $F(-c,0),A(a,0),B(0,b)$，则 $S_{\Delta ABF}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}=\frac{1}{2}(a+c)b$

$(a+c)b=\sqrt{2}+1$, 即 $(a+c)\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2}+1$. ……………………………………………………2 分

又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},a=\sqrt{2}c$，代入上式中得到.

$(\sqrt{2}c+c)\sqrt{2c^2-c^2}=\sqrt{2}+1.c=1$. 于是 $a=\sqrt{2},b=1$.

故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………………………………………………5 分

(2) 设直线 $l: y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-m)$ 交椭圆于 $S(x_1,y_1),T(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases} y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-m) \\ x^2+2y^2=2 \end{cases}$ 消去 y 得，$2x^2-2mx+m^2-2=0$.

因此 $x_1+x_2=m,x_1x_2=\frac{m^2-2}{2}$. ………………………………………………………7 分

于是

$$|PS|^2+|PT|^2=(x_1-m)^2+y_1^2+(x_2-m)^2+y_2^2$$
$$=\frac{3}{2}(x_1-m)^2+\frac{3}{2}(x_2-m)^2=\frac{3}{2}\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-2m(x_1+x_2)+2m^2\right]$$
$$=\frac{3}{2}(m^2-m^2+2-2m^2+2m^2)=3.$$

故 $|PS|^2+|PT|^2$ 为定值，且为3. ………………………………………………………12 分

21.【解析】(1) $f'(x)=\frac{1}{x}+2ax-1=\frac{2ax^2-x+1}{x},x>0$. ……………………………1 分

若 $a=0$，$f'(x)=\frac{1}{x}+2ax-1=-\frac{x-1}{x}$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单增，在 $(1,+\infty)$ 内单减.……2 分

若 $a>0$，由 $2ax^2-x+1=0$ 知，$\Delta=1-8a$.

当 $\Delta=1-8a\le0$, 即 $a\ge\frac{1}{8}$ 时，$2ax^2-x+1\ge0$，此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单增

当$\Delta=1-8a>0,\ 0<a<\frac{1}{8}$时，$x=\frac{1\pm\sqrt{1-8a}}{4a}$.

此时$f(x)$在$(0,\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a})$, $(\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4a},+\infty)$内单增，

在$(\frac{1-\sqrt{1-8a}}{4a},\frac{1+\sqrt{1-8a}}{4a})$内单减. ……………………………………………6 分

（2）$f(x)<\frac{1}{2}x^3+1$就是$\ln x+ax^2-x<\frac{1}{2}x^3+1$，$ax^2<\frac{1}{2}x^3+x+1-\ln x$,

即$a<\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}$，$x>2$.

令$g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}, x>2$, 则$g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-\frac{1-2\ln x}{x^3}$

$=\frac{x^3-2x-6+4\ln x}{2x^3}$，$x>2$. ……………………………………………………………………8 分

令$h(x)=x^3-2x-6+4\ln x, x>2, h'(x)=3x^2-2+\frac{4}{x}>0$,

所以$h(x)$在$x>2$时单增，$h(x)>h(2)=4\ln 2-2=2(\ln 4-1)>0$. 因此$g'(x)>0$，

$g(x)$在$x>2$时单增，$g(x)>g(2)=\frac{7-\ln 2}{4}$. 于是$a\le\frac{7-\ln 2}{4}$.

故a的取值范围是$\left[0,\frac{7-\ln 2}{4}\right]$. ……………………………………………………12 分

22.【解析】（1）当$k=1$时，$\begin{cases}x=2\cos^k t\\y=3\sin^k t\end{cases}$就是$\begin{cases}x=2\cos t\\y=3\sin t\end{cases}$，即$\begin{cases}\frac{x}{2}=\cos t\\\frac{y}{3}=\sin t\end{cases}$. ……………2 分

因为$\sin^2 t+\cos^2 t=1$，所以$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

故曲线C_1是以坐标原点为中心，焦点在y轴上，长轴长为6，短轴长为4的椭圆. …………4 分

（2）当$k=4$时，$\begin{cases}x=2\cos^k t\\y=3\sin^k t\end{cases}$就是$\begin{cases}x=2\cos^4 t\\y=3\sin^4 t\end{cases}$，即$\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{2}}=\cos^2 t\\\sqrt{\frac{y}{3}}=\sin^2 t\end{cases}$.

因为$\sin^2 t+\cos^2 t=1$，所以$\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{\frac{y}{3}}=1$，即为曲线$C_1$的普通方程. ………………7 分

因为曲线 C_2 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta-8\rho\sin\theta+5=0$，

所以其直角坐标方程是 $2x-8y+5=0$． ……………………………………………8 分

联立 $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{2}}+\sqrt{\dfrac{y}{3}}=1\\2x-8y+5=0\end{cases}$ 解得，$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\y=\dfrac{3}{4}\end{cases}$．故 C_1 与 C_2 的公共点的直角坐标是 $(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4})$．…………10 分

23.【解析】（1）$a=2$ 时，不等式 $f(x)>1$ 就是 $|x-3|-|x+2|>1$.

因为 $f(x)=\begin{cases}5, & x<-2\\-2x+1, & -2\le x<3\\-5, & x\ge 3\end{cases}$，

所以 $f(x)>1$ 等价于 $\begin{cases}x<-2\\5>1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-2\le x<3\\x<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\ge 3\\-5>1\end{cases}$，因此 $x<0$．

故不等式 $f(x)>1$ 的解集是 $(-\infty,0)$. ……………………………………………5 分

（2）因为 $|a|-|b|\le|a-b|$,所以 $f(x)=|x-3|-|x+a|\leqslant|(x-3)-(x+a)|=|a+3|$.

因此 $f(x)$ 的最大值为 $|a+3|$.

则对于任意实数 x，$f(x)\leqslant 2a$ 恒成立等价于 $|a+3|\leqslant 2a$． ……………………………8 分

当 $a\geqslant -3$ 时，$a+3\leqslant 2a$，得 $a\geqslant 3$；

当 $a<-3$ 时，$-a-3\leqslant 2a$，$a\geqslant -1$，不成立.

综上可知，a 的取值范围是 $[3,+\infty)$． ……………………………………………

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》