★启用前注意保密

广东省2024届普通高中毕业班第一次调研考试

数 学

本试卷共4页，考试用时120分钟，满分150分。

注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己所在的市（县、区）、学校、班级、姓名、考场号和座位号填写在答题卡上，将条形码横贴在每张答题卡左上角“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先画掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合$A=\{x\mid x>1\}$，$B=\left\{x\mid \frac{x-2}{x-1}\leqslant 0\right\}$，则$\complement_A B=$

A. $\{x\mid 1<x<2\}$　　B. $\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$　　C. $\{x\mid x\geqslant 2\}$　　D. $\{x\mid x>2\}$

2. 在复数范围内方程$x^2+2=0$的解为

A. $x=-\sqrt{2}$　　B. $x=\sqrt{2}\mathrm{i}$　　C. $x=\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$　　D. $x\in\varnothing$

3. 已知$\triangle ABC$的重心为O，则向量$\overrightarrow{BO}=$

A. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　B. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　C. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$　　D. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

4. 已知一个直角三角形的两条直角边的长分别为1和2，以它的斜边所在直线为旋转轴，其余两边旋转一周围成一旋转体，则此旋转体外接球的表面积为

A. 20π　　B. 12π　　C. 5π　　D. 3π

5. 已知函数$f(x+1)$的图象关于点$(1,1)$对称，则下列函数是奇函数的是

A. $y=f(x)+1$　　B. $y=f(x+2)+1$　　C. $y=f(x)-1$　　D. $y=f(x+2)-1$

6. “$0<a<b$”是“$a-\frac{1}{a}<b-\frac{1}{b}$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，$\sin\alpha+2\cos\beta=1$，$\cos\alpha-2\sin\beta=\sqrt{2}$，则 $\sin(\beta+\frac{\pi}{3})=$

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

8. 已知 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，$|\overrightarrow{AB}|=t$，$|\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{t}$. 若点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，且 $\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{2\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最大值为

A. 13　　B. $5-2\sqrt{2}$　　C. $5-2\sqrt{6}$　　D. $10+2\sqrt{2}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 甲、乙两班参加某次数学调研测试，相关统计数据如下表所示(满分 150 分，120 分以上为优秀)，则下列结论正确的是

A. 甲、乙两班学生成绩的平均数相同

B. 甲班成绩波动比乙班成绩波动大

C. 甲班优秀的人数少于乙班优秀的人数

D. 甲班成绩的众数小于乙班成绩的众数

班级	考试人数	中位数	平均数	方差
甲	55	119	112	18
乙	56	121	112	10

10. 若实数 a，b 满足 $2^a+2a=3^b+2b$，则下列关系式中可能成立的是

A. $0<a<b<1$　　B. $b<a<0$　　C. $1<a<b$　　D. $a=b$

11. 已知函数 $f(x)=\sin^n x+\cos^n x$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，则下列说法正确的是

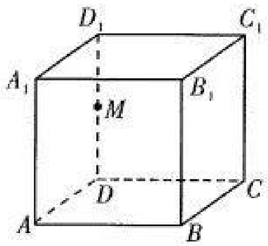
A. 对任意正奇数 n，$f(x)$ 为奇函数

B. 对任意正整数 n，$f(x)$ 的图象都关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称

C. 当 $n=3$ 时，$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. 当 $n=4$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$

12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，M 为 DD_1 的中点，N 为平面 $ABCD$ 上一动点，N_1 为平面 $A_1B_1C_1D_1$ 上一动点，且 $NN_1\perp$ 平面 $ABCD$，则



A. 若 MN 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$，则点 N 的轨迹为圆

B. 若 D_1N 与 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，则点 N 的轨迹为双曲线

C. 若点 N 到直线 BB_1 与到直线 DC 的距离相等，则点 N 的轨迹为抛物线

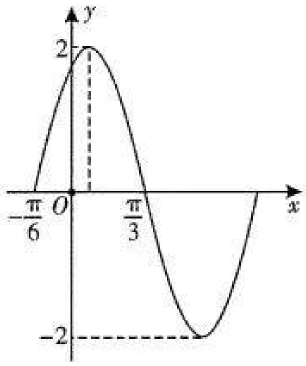
D. 若三棱柱 $NAD-N_1A_1D_1$ 的表面积为定值，则点 N 的轨迹为椭圆

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 0,\\ -2x, & x>0,\end{cases}$ 若 $f(x)=10$，则 $x=$________.

14. 已知直线 $ax+y-2=0$ 与圆心为 C 的圆 $(x-1)^2+(y-a)^2=16$ 相交于 A，B 两点，且 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，则 a 的值为________.

15. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(A>0,\ \omega>0,\ |\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，若 x_1，$x_2\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{3}\right)$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $f(x_1+x_2)=$________.



16. 英国著名物理学家牛顿用“作切线”的方法求函数零点时，给出的“牛顿数列”在航空航天中应用广泛. 若数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，则称数列 $\{x_n\}$ 为牛顿数列. 如果函数 $f(x)=x^2-x-2$，数列 $\{x_n\}$ 为牛顿数列，设 $a_n=\ln\dfrac{x_n+1}{x_n-2}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 且 $a_1=1$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_{10}=$________；$x_3=$________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_3=7$，$a_5+a_7=26$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

(1) 求 a_n 和 S_n；

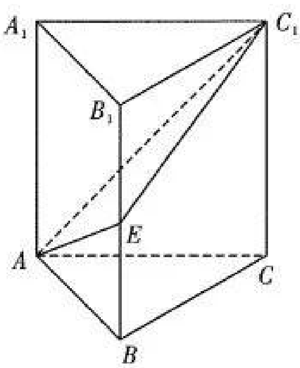
(2) 令 $b_n=\dfrac{1}{a_n^2-1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18. (12 分)

如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 E 为侧棱 BB_1 的中点.

(1) 证明：平面 $AEC_1\perp$ 平面 AC_1；

(2) 若 $AA_1=AB$，求平面 AEC_1 与平面 ABC 的夹角的大小.



19.（12 分）

在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$\tan C=\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$.

（1）求角 C 的大小；

（2）若△ABC 是锐角三角形，且其面积为$\sqrt{3}$，求边 c 的取值范围.

20.（12 分）

某同学尝试运用所学的概率知识研究如下游戏规则：游戏在两人中进行，参与者每次从装有 3 张空白券和 2 张奖券的盒子中轮流不放回地摸出一张，规定摸到最后一张奖券或能判断出哪一方获得最后一张奖券时游戏结束，能够获得最后一张奖券的参与者获胜.

（1）从胜负概率的角度，判断游戏规则的设置是否公平；

（2）设游戏结束时参与双方摸券的次数为 X，求随机变量 X 的分布列.

21.（12 分）

已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}+ax$，$x\in[0,2\pi]$.

（1）记 $f(x)$ 的导函数为 $g(x)$，求 $g(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的单调区间；

（2）若 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上的极大值、极小值恰好各有一个，求 a 的取值范围.

22.（12 分）

过椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点 F 作两条相互垂直的弦 AB，CD. AB，CD 的中点分别为 M，N.

（1）证明：直线 MN 过定点；

（2）若 AB，CD 的斜率均存在，求△FMN 面积的最大值.

★启用前注意保密

广东省2024届普通高中毕业班第一次调研考试

数学参考答案

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	C	D	A	A	B

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

题号	9	10	11	12
答案	ABC	ABD	BC	ABC

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．-3　　14．-1　　15．$\sqrt{3}$　　16．1023　$\dfrac{2e^4+1}{e^4-1}$（前空2分，后空3分）

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．解：（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，因为$a_3=7$，$a_5+a_7=26$，

所以$\begin{cases}a_1+2d=7,\\2a_1+10d=26,\end{cases}$ ………………………… 1分

解得$a_1=3$，$d=2$． ………………………… 3分

所以$a_n=3+2(n-1)=2n+1$，$S_n=3n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times2=n^2+2n$． …………… 5分

（2）由（1）知$a_n=2n+1$，

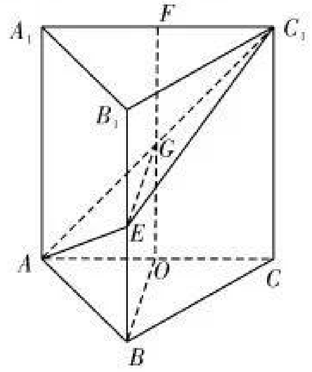
所以$b_n=\dfrac{1}{a_n^2-1}=\dfrac{1}{(2n+1)^2-1}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$， …………… 8分

所以$T_n=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n}{4(n+1)}$，

即数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n=\dfrac{n}{4(n+1)}$． ………………………… 10分

18．（1）证明：如图，分别取AC，A_1C_1的中点为O，F，连接OF与AC_1交于点G，连接EG，BO，则点G为OF，AC_1的中点． ………………………… 1分

又点 E 为 BB_1 的中点，则 $BE // OG$ 且 $BE = OG$，



所以四边形 $BEGO$ 是平行四边形，$EG // OB$. ………………………………………… 3 分

在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $AC_1 \perp$ 平面 ABC，

平面 $AC_1 \cap$ 平面 $ABC = AC$，$BO \perp AC$，

所以 $BO \perp$ 平面 AC_1，所以 $EG \perp$ 平面 AC_1. ………………………………………… 5 分

又 $EG \subset$ 平面 AEC_1，所以平面 $AEC_1 \perp$ 平面 AC_1. ……………………………… 6 分

(2) 解：【方法一】设 $AB = 2$，则 $AA_1 = 2$，$BE = B_1E = 1$，所以 $AE = EC_1 = \sqrt{5}$，

$AC_1 = 2\sqrt{2}$.

$\triangle AEC_1$ 为等腰三角形，(易求得边 AC_1 上的高为 $\sqrt{3}$.

所以 $\triangle AEC_1$ 的面积为 $S_{\triangle AEC_1} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$. ……………………… 9 分

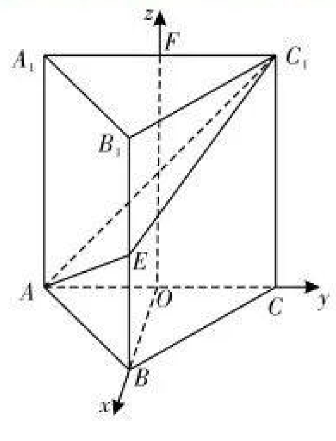
$\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$. ……………………………………… 10 分

设平面 AEC_1 与平面 ABC 的夹角为 θ，

则由射影面积公式可得 $\cos\theta = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AEC_1}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\theta = \frac{\pi}{4}$，即平面 AEC_1 与平面 ABC 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$. ……… 12 分

【方法二】如图，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，设 $AB = 2$，



则 $A(0,-1,0)$，$C_1(0,1,2)$，$E(\sqrt{3},0,1)$，所以 $\overrightarrow{AC_1}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3},1,1)$.

设平面 AEC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，则由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AC_1}=2y+2z=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AE}=\sqrt{3}x+y+z=0,\end{cases}$ 可取

$\boldsymbol{n}_1=(0,1,-1)$； ………………………………………………………… 9 分

又平面 ABC 的一个法向量可取为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$. ……………………………… 10 分

设平面 AEC_1 与平面 ABC 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot 1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，即平面 AEC_1 与平面 ABC 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$. ……… 12 分

19. 解：(1) 因为 $\tan C=\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$，则 $\dfrac{\sin C}{\cos C}=\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$， ………………… 1 分

所以 $\sin C\cos A+\sin C\cos B=\cos C\sin A+\cos C\sin B$，

即 $\sin C\cos A-\cos C\sin A=\cos C\sin B-\sin C\cos B$，

得 $\sin(C-A)=\sin(B-C)$. ………………………………………………………… 3 分

所以 $C-A=B-C$ 或 $C-A=\pi-(B-C)$（不成立，舍去）， ………………… 5 分

从而 $2C=A+B$，又 $A+B+C=\pi$，所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………… 6 分

(2) 由 (1) 知 $A+B=\dfrac{2\pi}{3}$，又 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，则 $\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2},\\ 0<\dfrac{2\pi}{3}-A<\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$

得 $\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$. ……………………………………………………………… 7 分

因为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{c^2}{2}\cdot\dfrac{\sin A\sin B}{\sin C}=\dfrac{c^2}{\sqrt{3}}\sin A\sin B=\sqrt{3}$，

所以 $c^2=\dfrac{3}{\sin A\sin B}$. ……………………………………………………………… 8 分

设 $y=\sin A\sin B$，因为 $B=\dfrac{2\pi}{3}-A$，

所以 $y=\sin A\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)=\sin A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}\sin A\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\cos 2A=\dfrac{1}{2}\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{4}$， ……………………………………………………………… 10 分

因为 $\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\dfrac{\pi}{6}<2A-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，所以 $y\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right]$，

从而 $c^2=[4,6)$，即 $c\in[2,\sqrt{6})$，所以边 c 的取值范围是 $[2,\sqrt{6})$. …… 12 分

20. 解：【方法一】（1）将3张空白券简记为“白”，将2张奖券简记为“奖”，率先摸券的一方获胜，……1分

包括以下几种情况：

①双方共摸券3次，出现“奖白奖”“白奖奖”“白白白”这三种情形，

对应的概率为 $P_1=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{10}$； …………… 3分

②双方共摸券4次，出现的恰好是“三白一奖且前三次必定出现一次奖券”，

对应的概率为 $P_2=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$；

…………………………………………………………………………………………… 5分

故先摸券的一方获胜的概率 $P=P_1+P_2=\frac{3}{5}$， ……………………………… 6分

因为 $\frac{3}{5}>\frac{1}{2}$，所以这场游戏规则的设置不公平. ……………………………… 7分

（2）由题意可知 X 的可能取值为2，3，4， ……………………………… 8分

所以 $P(X=2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$，

$P(X=3)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{10}$，

$P(X=4)=1-P(X=2)-P(X=3)=\frac{3}{5}$， ……………………………… 11分

所以 X 的分布列为：

X	2	3	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

…………………………………………………… 12分

【方法二】将3张空白券简记为“白”，将2张奖券简记为“奖”，则5张券的摸出顺序有10种：

“白白白奖奖”“白白奖白奖”“白白奖奖白”“白奖白白奖”“白奖奖白”

“白奖奖白白”“奖白白白奖”“奖白白奖白”“奖白奖白白”“奖奖白白白”.

…………………………………………………………………………………………… 2分

依题意，游戏结束时参与双方摸券的次数与胜方依次为：“3次、先摸方胜”“4次、先摸方胜”“4次、后摸方胜”“4次、先摸方胜”“4次、后摸方胜”“3次、先摸方胜”“4次、先摸方胜”“4次、后摸方胜”“3次、先摸方胜”“2次，后摸方胜”. ……………………………………………… 4分

（1）设事件 A：先摸券的一方获胜，则 $n(A)=6$，所以 $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，

…………………………………………………………………………………………… 6分

因为$\frac{3}{5}>\frac{1}{2}$，所以游戏规则的设置不公平. ………………………… 7 分

（2）由题意可知 X 的可能取值为 2，3，4， ………………………… 8 分

且 $P(X=2)=\frac{1}{10}$，$P(X=3)=\frac{3}{10}$，$P(X=4)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. ………………… 11 分

所以 X 的分布列为来源：高三答案公众号

X	2	3	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

………………………………………… 12 分

21. 解：（1）由 $f(x)=\frac{\sin x}{e^x}+ax$，得 $f'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}+a$，

即 $g(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}+a$. ………………………………… 1 分

则 $g'(x)=\frac{-2\cos x}{e^x}$，令 $\frac{-2\cos x}{e^x}=0$，得 $x=\frac{\pi}{2}$ 或 $x=\frac{3\pi}{2}$. ………………… 3 分

由 $g'(x)<0$，解得 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$； ………………………… 4 分

由 $g'(x)>0$，解得 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$. ………………………………… 5 分

所以函数 $g(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的单调递增区间为 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，单调递减区间为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$. ………………………………… 6 分

（2）由（1）知，$g(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处取得极小值，在 $x=\frac{3\pi}{2}$ 处取得极大值.

又 $g(0)=a+1$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=a-e^{-\frac{\pi}{2}}$，$g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=a+e^{-\frac{3\pi}{2}}$，$g(2\pi)=a+e^{-2\pi}$，

则 $g(0)>g\left(\frac{3\pi}{2}\right)>g(2\pi)>g\left(\frac{\pi}{2}\right)$. ………………………… 8 分

若 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)\geqslant 0$，则 $f'(x)\geqslant 0$，故 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内单调递增，

从而 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内无极值，不合题设，

所以 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$； ………………………………………… 9 分

若 $g(2\pi)<0$，当 $g\left(\frac{3\pi}{2}\right)\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内至多有一个极值点，不合题设；

当 $g\left(\frac{3\pi}{2}\right)>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内有三个极值点，不合题设.

所以 $g(2\pi)\geqslant 0$. ………………………………………………………… 10 分

所以$\begin{cases}g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a-e^{-\frac{\pi}{2}}<0,\\ g(2\pi)=a+e^{-2\pi}\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $-e^{-2\pi}\leqslant a<e^{-\frac{\pi}{2}}$. ……………………………… 11 分

此时 $g(0)>g\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)>g(2\pi)\geqslant 0>g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$,

则存在唯一 $x_1\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(x_1)=0$，当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in\left(x_1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，则 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 取得极大值；

存在唯一 $x_2\in\left(\dfrac{\pi}{2},2\pi\right)$，使得 $f'(x_2)=0$，当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},x_2\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_2,2\pi)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，则 $f(x)$ 在 $x=x_2$ 取得极小值.

综上，所求 a 的取值范围是 $[-e^{-2\pi},e^{-\frac{\pi}{2}})$. ………………………………… 12 分

22.（1）证明：由题可知 $F(1,0)$.

若直线 AB，CD 有一条斜率不存在，则另一条斜率为 0，其中点分别为直线与 x 轴的交点、原点，过此两点的直线 MN 方程为 $y=0$. ……………………………… 1 分

若直线 AB，CD 的斜率存在，设直线 AB 的斜率为 k，则直线 CD 的斜率为 $-\dfrac{1}{k}$,

由题，可设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，直线 CD 的方程为 $y=-\dfrac{1}{k}(x-1)$.

…………………………………………………………………………………… 2 分

联立$\begin{cases}y=k(x-1),\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消元 y，整理得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+(4k^2-12)=0$,

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2)-2k=\dfrac{-6k}{3+4k^2}$,

…………………………………………………………………………………… 3 分

从而 $x_M=\dfrac{4k^2}{3+4k^2}$，$y_M=\dfrac{-3k}{3+4k^2}$，即 $M\left(\dfrac{4k^2}{3+4k^2},\dfrac{-3k}{3+4k^2}\right)$； ………………………… 4 分

同理 $N\left(\dfrac{4}{3k^2+4},\dfrac{3k}{3k^2+4}\right)$. ……………………………………………………… 5 分

所以 $k_{MN}=\dfrac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\dfrac{\dfrac{-3k}{3+4k^2}-\dfrac{3k}{3k^2+4}}{\dfrac{4k^2}{3+4k^2}-\dfrac{4}{3k^2+4}}=\dfrac{-7k}{4k^2-4}$,

则直线 MN 的方程为 $y-\frac{-3k}{3+4k^2}=\frac{-7k}{4k^2-4}\left(x-\frac{4k^2}{3+4k^2}\right)$， ………………………… 6 分

整理得 $y=\frac{-7k}{4k^2-4}\left(x-\frac{4}{7}\right)$，即直线 MN 过定点 $Q\left(\frac{4}{7},0\right)$，直线 $y=0$ 也满足过定点 $Q\left(\frac{4}{7},0\right)$.

综上，直线 MN 过定点 $Q\left(\frac{4}{7},0\right)$. ……………………………………………… 7 分

（2）解：由（1）可得

$$S_{\triangle FMN}=\frac{1}{2}\cdot|FQ|\cdot|y_M-y_N|=\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}\times\left|\frac{-3k}{3+4k^2}-\frac{3k}{3k^2+4}\right|=\frac{9|k|\cdot|1+k^2|}{2(12k^4+25k^2+12)}$$

$$=\frac{9|k|\cdot|1+k^2|}{2[12(k^2+1)^2+k^2]}=\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{\frac{12(k^2+1)}{|k|}+\frac{|k|}{k^2+1}}\ (*).$$ ……………… 9 分

令 $t=\frac{k^2+1}{|k|}$，则 $t=\frac{k^2+1}{|k|}\geqslant\frac{2|k|}{|k|}=2$，当且仅当 $k^2=1$，即 $k=\pm1$ 时取等号.

从而 $y=12t+\frac{1}{t}$ 在 $t\in[2,+\infty)$ 上单调递增，当 $t=2$，即 $k=\pm1$ 时取得最小值 $y_{\min}=\frac{49}{2}$. ………………………… 11 分

所以 $(*)\leqslant\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{\frac{49}{2}}=\frac{9}{49}$，即当 $k=\pm1$ 时，$S_{\triangle FMN}$ 取得最大值为 $\frac{9}{49}$. …… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。