开封市2023届高三年级第三次模拟考试
数学（文科）参考答案

一、选择题（每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	D	D	D	A	C	A	D	C	B	C

二、填空题（每小题5分，共20分）

13. $(2,1)$(答案不唯一)　　14. 2　　15. $\frac{1}{3}$　　16. $4-\sqrt{3}$

三、解答题（共70分）

17.（1）由频率分布直方图得：

“锻炼时间达标”的学生的概率估计为$(0.010+0.005)\times10=0.15$，……2分

所以该校“锻炼时间达标”的学生人数估计为$1000\times0.15=150$（人）.……4分

（2）样本数据中：“锻炼时间达标”的学生人数为$100\times0.15=15$（人），其中女生有5人，男生有10人，

“锻炼时间未达标”的女生人数为$50-5=45$（人），男生人数为$50-10=40$（人），

所以2×2列联表为：

	锻炼时间达标	锻炼时间未达标	合计
男	10	40	50
女	5	45	50
合计	15	85	100

……8分

$k=\frac{100\times(10\times45-5\times40)^2}{50\times50\times15\times85}\approx1.961<2.706$，……10分

所以没有90%的把握认为“锻炼时间达标”与性别有关.……12分

18.（1）设$a=b-2$，$c=b+2$，……2分

由$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{(b-2)^2+(b+2)^2-b^2}{2(b-2)(b+2)}=\frac{b^2+8}{2(b^2-4)}=\frac{11}{16}$，……4分

解之可得$b=6$.……6分

（2）由（1）知$a=4$，$b=6$，$c=8$，……8分

所以$CD^2=BC^2+BD^2-2BC\times BD\times\cos B=16+16-2\times4\times4\times\frac{11}{16}=10$，……10分

所以$CD=\sqrt{10}$.……12分

19. 解：（1）证明：连接AF，

$\because$四边形$ABCD$是圆柱OO_1的轴截面，$\therefore AB$为圆O的直径，$\therefore AF\perp BF$，……2分

又EF是圆柱的母线，$\therefore EF\perp$平面ABF，$\because BF\subset$平面ABF，$\therefore EF\perp BF$，……4分

又$\because AF\cap EF=F$，$AD// EF$，$\therefore BF\perp$平面$ADEF$，

又$\because P$是线段AD的中点，$\therefore$平面$ADEF$即为平面EPF，$\therefore BF\perp$平面EPF.……6分

（2）由（1）知$BF\perp$平面EPF，$\therefore BF$为三棱锥$B-EPF$的高，且AF为AB在平面EPF内的射影，

$\therefore AB$与平面EPF所成角为$\angle BAF$，由已知$\angle BAF=60^\circ$，$AB=4$，$BC=6$，……8分

$\therefore BF=AB\sin60^\circ=2\sqrt{3}, AF=AB\cos60^\circ=2$，$S_{\Delta EPF}=\frac{1}{2}EF\cdot AF=6$，……10分

$\therefore V_{B-EPF}=\frac{1}{3}S_{\Delta EPF}\cdot BF=\frac{1}{3}\times 6\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$. ……12 分

20. 解：（1）当 $m=1$ 时，$PF_1\perp x$ 轴，设 P 点坐标为 $\left(c,\ y_0\right)$ 代入椭圆方程得：

$\frac{c^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}=1$，所以 ${y_0}^2=\frac{b^4}{a^2}$，即 $\left|PA\right|=\frac{2b^2}{a}=3$，……1 分　　又因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2},a^2=b^2+c^2$，……2 分

解得：$a=2,b=\sqrt{3},c=1$，所以椭圆 C 的标准方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……4 分

（2）设 $P\left(x_0,\ y_0\right),A\left(x_1,\ y_1\right),B\left(x_2,\ y_2\right),PA:x=t_1y-1,PB:x=t_2y+1$. ……5 分

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ x=t_1y-1\end{cases}$ 得：$\left(3t_1^2+4\right)y^2-6t_1y-9=0$，

所以 $y_1y_0=-\frac{9}{3t_1^2+4}$，同理可得：$y_2y_0=-\frac{9}{3t_2^2+4}$，……7 分

由 $\begin{cases}\overrightarrow{PF_1}=m\overrightarrow{F_1A},\\ \overrightarrow{PF_2}=n\overrightarrow{F_2B},\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}my_1+y_0=0,\\ ny_2+y_0=0,\end{cases}$ ……8 分

所以，$m+n=-\left(\frac{y_0}{y_1}+\frac{y_0}{y_2}\right)=-\left(\frac{y_0^2}{y_0y_1}+\frac{y_0^2}{y_0y_2}\right)=-\left(\frac{y_0^2}{-\frac{9}{3{t_1}^2+4}}+\frac{y_0^2}{-\frac{9}{3{t_2}^2+4}}\right)$ ……10 分

$=\frac{y_0^2}{9}(3{t_1}^2+3{t_2}^2+8)=\frac{y_0^2}{9}(3(\frac{x_0+1}{y_0})^2+3(\frac{x_0-1}{y_0})^2+8)=\frac{1}{9}(6x_0^2+8y_0^2+6)=\frac{30}{9}=\frac{10}{3}$，

所以 $m+n$ 是定值 $\frac{10}{3}$. ……12 分

21.（1）函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，$f'(x)=\frac{1}{x}+a$，……1 分

当 $a\ge 0$ 时，$f'(x)>0$，此时 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增；……2 分

当 $a<0$ 时，$f'(x)>0\Rightarrow 0<x<-\frac{1}{a}$，$f'(x)<0\Rightarrow x>-\frac{1}{a}$，

此时 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减. ……3 分

综上可知：当 $a\ge 0$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减. ……4 分

（2）由（1）知：当 $a\ge 0$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，

$f\left(x\right)$ 定义在 $\left[m,n\right]$ 上，所以 $f\left(x\right)\in\left[\ln m+ma,\ln n+na\right]$，

得到：$\left[\ln m+ma,\ln n+na\right]\subseteq\left[m,n\right]$，即 $\begin{cases}\ln m+ma\ge m,\\ \ln n+na\le n,\end{cases}$ ……6 分

记函数 $h\left(x\right)=\ln x+\left(a-1\right)x$，则上式转化为 $h\left(m\right)\ge 0$ 且 $h\left(n\right)\le 0$，

又 $h'(x)=\frac{1}{x}+a-1=\frac{\left(a-1\right)x+1}{x}$，……8 分

①当 $a\ge 1$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，

由 $0<m<n$，可得 $h\left(m\right)<h\left(n\right)$，与 $h\left(m\right)\ge 0$ 且 $h\left(n\right)\le 0$ 矛盾；……9 分

②当$0\le a<1$时，$0<x<\dfrac{1}{1-a}$时，$h'(x)>0$，$x>\dfrac{1}{1-a}$时，$h'(x)<0$，

所以$h(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{1-a}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{1}{1-a},+\infty\right)$上单调递减，

$h(x)$的最大值为$h\left(\dfrac{1}{1-a}\right)=-\ln(1-a)-1$，依据直线和对数增长的差异易知$x\to+\infty$，$h(x)\to-\infty$，

要满足$h(m)\ge0$且$h(n)\le0$，只需$h\left(\dfrac{1}{1-a}\right)\ge0$，解得$a\ge1-\dfrac{1}{e}$. ……11 分

综上可知：a的取值范围为$\left[1-\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right)$. ……12 分

22.（1）$\because P\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\therefore P$的直角坐标为$(1,\sqrt{3})$，又等边$\Delta OPQ$的边长为 2，

$\therefore$圆P的直角坐标方程为：$(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$，……2 分

$\because CQ$的直角坐标方程为：$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$，即$x+\sqrt{3}y-2=0$，

$\therefore CQ$的极坐标方程为：$\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta-2=0$；……4 分

（2）设 A，B 两点的极坐标分别为$A(\rho_1,\theta),B(\rho_2,\theta)$，

$\because$圆P的直角坐标方程为：$(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$，

$\therefore$圆P的极坐标方程为：$(\rho\cos\theta-1)^2+(\rho\sin\theta-\sqrt{3})^2=4$，……6 分

即$\rho^2-2\left(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta\right)\rho=0$，$\therefore\ \rho_1=2(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)$，

直线CQ的极坐标方程为$\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta-2=0$，$\therefore\ \rho_2=\dfrac{2}{\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}$，……8 分

$\therefore |OA|\cdot|OB|=\rho_1\rho_2==2\left(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta\right)\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}=4$.

综上所述：$|OA|\cdot|OB|$为定值 4. ……10 分

23.（1）根据三角形不等式得，$f(x)=|x-a|+|x-b|\ge|x-a-(x-b)|=|a-b|$，……2 分

$\because |a-b|>c$，$\therefore\ f(x)>c$恒成立，不等式$f(x)>c$的解集为$\mathbf{R}$. ……4 分

（2）当$b=1$时，不等式$f(x)<2-|a-2|$的解集非空，

即存在x使不等式$f(x)=|x-a|+|x-1|<2-|a-2|$成立，即$f(x)_{\min}<2-|a-2|$成立，……6 分

$\because\ f(x)\ge|(x-a)-(x-1)|=|a-1|$，$f(x)_{\min}=|a-1|$，

$\therefore |a-1|<2-|a-2|$，即$|a-1|+|a-2|<2$，……8 分

当$a\le1, |a-1|+|a-2|=3-2a<2, a>\dfrac{1}{2},\therefore\dfrac{1}{2}<a\le1,$

当$1<a<2, |a-1|+|a-2|=1<2,\therefore 1<a<2,$

当$a\ge2, |a-1|+|a-2|=2a-3<2, a<\dfrac{5}{2},\therefore 2\le a<\dfrac{5}{2},$

综上所述：a的取值范围是$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right)$. ……10 分