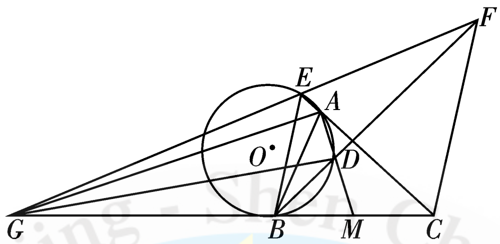
第四届陈省身杯全国高中数学奥林匹克

1. 如图,$\triangle ABC$ 满足 $AB<AC$,M 为边 BC 的中点,过点 A 的$\odot O$ 与边 BC 切于点 B,且与线段 AM 交于点 D,与 CA 的延长线交于点 E,过点 C 且平行于 BE 的直线与 BD 的延长线交于点 F,FE、CB 的延长线交于点 G. 证明:$GA=GD$.



图

2. 已知 a、b、c 是三个互异实数. 若在二次方程

$$x^2+ax+b=0, \quad ①$$

$$x^2+bx+c=0, \quad ②$$

$$x^2+cx+a=0 \quad ③$$

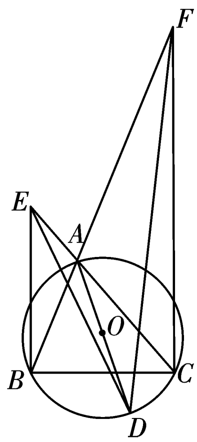
中任意两个均恰有一个公共根,求 $a^2+b^2+c^2$ 的值.

3. 对任意的 $a\in\{0,1,\cdots,9\}$,证明:集合 $X=\{[n\sqrt{2}]\mid n\in\mathbf{N}_+\}$ 中有无穷多个元素,其个位数字为 a,其中,$[x]$表示不超过实数 x 的最大整数.

4. 已知 2 013 个人,每人分别持有 1,2,…,2 013 张卡片,按任意顺序围坐在圆桌旁. 一次传递是指某人将自己手中的一张卡片传给与其相邻的两个人之一. 证明:若经过 m 次传递后,使得每个人持有的卡片数相同,且 m 最小,则存在相邻两人,他们相互之间没有传递卡片.

5. 如图,锐角$\triangle ABC$ 的外接圆为$\odot O$,AD 为$\odot O$ 的直径,过点 B、C 且垂直于 BC 的直线与 CA、BA 的延长线分别交于点 E、F. 证明:

$\angle ADF=\angle BED$.



图

6. 设函数 $f:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$. 若$f(x^2)-x^3$、$f(x^3)-x^4$均严格单调递增,证明:

$f(x^5)+100(f(x^5)-x^7)$

严格单调递增.

7. 证明:不存在大于 7 的素数 p,使得 $p^{12}+5\ 039\times5\ 041$ 的正因子的个数小于 120.

8. 在 $4n\times4n(n\in\mathbf{N}_+)$实数表中,每个数的绝对值均不超过 1,所有数的和为 0. 已知数表中的每行各数之和的绝对值、每列各数之和的绝对值均不小于 c. 求 c 的最大可能值.

——答案请参考《中等数学》2013 年第 10 期