2022—2023 学年(下)南阳六校高一年级期末考试

数学 · 答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案 C

命题意图 本题考查弧度制的应用.

解析 因为弦 AB 的长等于圆的半径,所以 $\triangle OAB$ 是等边三角形,所以 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$,所以劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 $\frac{2\pi}{3}$.

2. 答案 B

命题意图 本题考查复数的运算与几何意义.

解析 $z=\frac{4\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{4\mathrm{i}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})}{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})(1+\sqrt{3}\mathrm{i})}=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$,$z$ 在复平面内对应的点为 $(-\sqrt{3},1)$,位于第二象限.

3. 答案 B

命题意图 本题考查二倍角公式的应用.

解析 因为 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{2}{3}$,即 $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{2}{3}$,所以 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{1}{3}$. 因为 $0<\alpha<\pi$,所以 $\cos\alpha<0<\sin\alpha$,故 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,所以 $\sin\alpha-\cos\alpha>0$. 因为 $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$,所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

4. 答案 D

命题意图 本题考查直观图的画法.

解析 由已知得 $\angle y'A'x'=45°$,则 $D'E'=3$,$A'E'=\sqrt{2}A'D'=3\sqrt{2}$,根据斜二测画法还原出平行四边形 $ABCD$,可得 $AE=6\sqrt{2}$,$DE=3$,则 $AD=\sqrt{(6\sqrt{2})^2+3^2}=9$.

5. 答案 A

命题意图 本题考查三角函数与三角恒等变换的应用.

解析 因为 $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos 2A}{2}$,所以 $\frac{1+\cos A}{2}=\frac{2-2\cos^2 A}{2}$,整理得 $2\cos^2 A+\cos A-1=0$,即 $(2\cos A-1)(\cos A+1)=0$,因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $\cos A=\frac{1}{2}$,则 $A=\frac{\pi}{3}$,又因为 $b=c$,所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形,所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

6. 答案 C

命题意图 本题考查三角函数的图象变换.

解析 由题意知 $g(x)=2\sin\left[4\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\theta\right]=2\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}-\theta\right)$,因为 $g(x)$ 是偶函数,所以 $\frac{2\pi}{3}+\theta=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$,即 $\theta=k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$,而 $|\theta|<\frac{\pi}{2}$,则 $k=0$,$\theta=-\frac{\pi}{6}$,因此 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,由 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得 $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,此即为 $f(x)$ 的零点.

7. **答案** D

命题意图 本题考查四棱台与球的综合问题.

解析 由题意,正四棱台的上底面边长为 $2\sqrt{2}$,则上底面外接圆的半径为 2,下底面边长为 $4\sqrt{2}$,则下底面外接圆的半径为 4,又因为正四棱台外接球的表面积为 80π,故外接球的半径为 $R=2\sqrt{5}$. 设正四棱台的高为 h,若外接球球心在四棱台的内部,则有 $h=\sqrt{R^2-4}+\sqrt{R^2-16}=4+2=6$,此时该正四棱台的体积为 $V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h=\frac{1}{3}(8+2\sqrt{2}\times4\sqrt{2}+32)\times6=112$. 若外接球球心在四棱台的外部,则 $h=4-2=2$,此时计算得 $V=\frac{112}{3}$.

8. **答案** B

命题意图 本题考查解三角形.

解析 设△ABC 中,$\angle A$,$\angle B$,$\angle ACB$ 的对边分别为 a,b,c. 因为 $\sin A:\sin B=2:3$,由正弦定理可得 $a:b=2:3$. 设 $a=2x(x>0)$,$b=3x$. 因为 $S_{\triangle ABC}=6\sqrt{3}$,所以$\frac{1}{2}\times2x\times3x\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$,所以 $x=2$,所以 $a=4$,$b=6$. 设 AB 的中点为 D. 由已知得$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$,所以$|\overrightarrow{CD}|^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{CB}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB})=\frac{1}{4}(b^2+a^2+2ab\cos\angle ACB)=\frac{1}{4}(6^2+4^2+4\times6)=19$,所以$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{19}$.

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. **答案** CD

命题意图 本题考查空间位置关系的判断.

解析 对于选项 A,若 $m\perp n$,$m\subset\alpha$,$n\subset\beta$,因为直线 m 与 n 还可能是异面垂直,故平面 α,β 不一定垂直,所以 A 错误;对于选项 B,因为 $m/\!/n$,$m\perp\alpha$,$\alpha\perp\beta$,故此时有可能 $n/\!/\beta$,或 $n\subset\beta$,所以 B 错误. C,D 正确.

10. **答案** BCD

命题意图 本题考查复数的概念以及相关运算.

解析 对于 A,$z=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 的虚部为 1,故 A 错误;

对于 B,$\frac{\mathrm{i}^{2\,023}}{z}=\frac{\mathrm{i}^{4\times505+3}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=\frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=\frac{-\mathrm{i}(\sqrt{3}-\mathrm{i})}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})(\sqrt{3}-\mathrm{i})}=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$,故 B 正确;

对于 C,$\bar{z}=\sqrt{3}-\mathrm{i}$,$(1-\sqrt{3}\mathrm{i})z=(1-\sqrt{3}\mathrm{i})(\sqrt{3}+\mathrm{i})=2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$,故有 $2\bar{z}=(1-\sqrt{3}\mathrm{i})z$,故 C 正确;

对于 D,借助复数的几何意义可知 $|z_0-z|\geq||z_0|-|z||=|1-2|=1$,当 z_0 和 z 在复平面内对应的向量同向时等号成立,即 $z_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ 时 $|z_0-z|=\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right|=1$,故 D 正确.

11. **答案** ABD

命题意图 本题考查空间位置关系的判断.

解析 对于 A,因为 H 是 BC 的中点,在等腰三角形 PBC 中,$PH\perp BC$,在等边三角形 ABC 中,$AH\perp BC$,又 $AH\cap PH=H$,所以 $BC\perp$ 平面 PAH,所以平面 $PAH\perp$ 平面 ABC,故 A 正确;

对于 B,因为 E,F 分别是 AB,AC 的中点,所以 $EF/\!/BC$,所以 $EF\perp$ 平面 PAH,所以平面 $PEF\perp$ 平面 PAH,故 B 正确;

对于 C，易知 $PE=PF$，O 为 EF 的中点，则 $PO\perp EF$，若平面 $PEF\perp$ 平面 ABC，则 $PO\perp$ 平面 ABC，根据正三棱锥的结构特征，P 点在底面 ABC 内的射影是 $\triangle ABC$ 的中心，也是 AH 的三等分点，但此处 O 为 AH 的中点，矛盾，故 C 错误；

对于 D，连接 OD，则在 $\triangle PAH$ 中可得 $OD/\!/PA$. 因为正三棱锥 $P-ABC$ 的底面边长是侧棱长的 $\sqrt{2}$ 倍，即侧面均为等腰直角三角形，$PA\perp PB$，$PA\perp PC$，从而 $PA\perp$ 平面 PBC，所以 $OD\perp$ 平面 PBC，又 $OD\subset$ 平面 EFD，所以平面 $EFD\perp$ 平面 PBC.

12. **答案**　ACD

命题意图　本题考查三角恒等变换、三角函数的图象与性质.

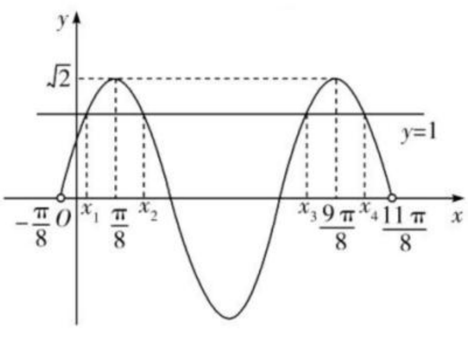
解析　$f(x)=2\cos\varphi\cos(2x+\varphi)+\sin 2x-\cos(2x+2\varphi)=\sin\varphi\sin(2x+\varphi)+2\cos\varphi\cos(2x+\varphi)+\sin 2x-\cos\varphi\cos(2x+\varphi)=\cos\varphi\cos(2x+\varphi)+\sin\varphi\sin(2x+\varphi)+\sin 2x=\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

对于 A，令 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=1$ 时，$x=\frac{3\pi}{8}$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{8},0\right)$ 中心对称，故 A 正确；

对于 B，函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. 故 B 错误；

对于 C，令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $-\frac{3\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{8}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right]$ 上单调递增，故 C 正确；

对于 D，当 $-\frac{\pi}{8}<x<\frac{11\pi}{8}$ 时，$0<2x+\frac{\pi}{4}<3\pi$，作出函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{8},\frac{11\pi}{8}\right)$ 上的大致图象如图所示，直线 $y=1$ 与 $f(x)$ 的图象在区间 $\left(-\frac{\pi}{8},\frac{11\pi}{8}\right)$ 上有四个交点，设这四个交点的横坐标由小到大分别为 x_1,x_2,x_3,x_4，由图象可知，点 $(x_1,1)$，$(x_2,1)$ 关于直线 $x=\frac{\pi}{8}$ 对称，点 $(x_3,1)$，$(x_4,1)$ 关于直线 $x=\frac{9\pi}{8}$ 对称，所以 $f(x)=1$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{8},\frac{11\pi}{8}\right)$ 上的所有实根之和为 $x_1+x_2+x_3+x_4=2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{9\pi}{8}\right)=\frac{5\pi}{2}$，故 D 正确.



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案**　$6\sqrt{2}$

命题意图　本题考查平面向量的坐标运算.

解析　因为 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{c}=(\lambda+2,2\lambda-2)$，又因为 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $(\lambda+2)\times1-(2\lambda-2)=0$，解得 $\lambda=4$，$\boldsymbol{c}=(6,6)$，则 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$.

14. **答案** $\left[k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$

命题意图 本题考查正切函数的性质.

解析 因为 $y=\tan\left(2ax-\frac{\pi}{4}\right)(a>0)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{2a}=\frac{\pi}{2}$，即 $a=1$. 对于函数 $y=\sqrt{\tan x-1}$，由 $\tan x\geqslant 1$，解得 $\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x<\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以定义域为 $\left[k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

15. **答案** -6

命题意图 本题考查三角函数的概念以及诱导公式的应用.

解析 由已知得 $\tan\alpha=\frac{-3m}{m}=-3$，$\frac{\sin(\alpha-2\pi)+3\cos(\pi-\alpha)}{2\sin\left(-\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(7\pi+\alpha)}=\frac{\sin\alpha-3\cos\alpha}{-2\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\tan\alpha-3}{-2-\tan\alpha}=\frac{-3-3}{-2+3}=-6$.

16. **答案** $6,2\sqrt{13}$（填对一空得 3 分，都填对得 5 分）

命题意图 本题考查平面向量的几何意义.

解析 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，根据余弦定理可得 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos\theta}=\sqrt{13-12\cos\theta}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3^2+2^2+2\times3\times2\times\cos\theta}=\sqrt{13+12\cos\theta}$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{13+12\cos\theta}+\sqrt{13-12\cos\theta}$. 令 $y=\sqrt{13+12\cos\theta}+\sqrt{13-12\cos\theta}$，则 $y^2=26+2\sqrt{169-144\cos^2\theta}\in[36,52]$，据此可得 $(|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|)_{\min}=\sqrt{36}=6$，$(|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|)_{\max}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$，即 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 的最小值是 6，最大值是 $2\sqrt{13}$.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

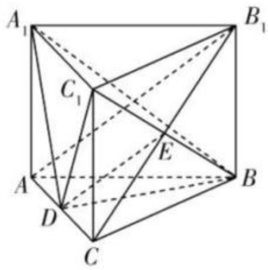
17. **命题意图** 本题考查线面平行的证明以及棱锥与棱柱的体积计算.

解析 （Ⅰ）如图，连接 B_1C 交 BC_1 于点 E，则 E 是 B_1C 的中点. ………………（1 分）

连接 DE，因为 D 是 AC 的中点，所以 $DE/\!/AB_1$. ………………（3 分）

又 $AB_1\not\subset$ 平面 BC_1D，且 $DE\subset$ 平面 BC_1D.

所以 $AB_1/\!/$ 平面 BC_1D. ………………（5 分）



（Ⅱ）由图可知 $V_{A_1C_1BD}=V_{ABC-A_1B_1C_1}-V_{B-A_1B_1C_1}-V_{A_1-ABD}-V_{C_1-BCD}$，………………（6 分）

设三棱柱的底面积为 S，高为 h，

则 $V_{B-A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}=2$，………………（7 分）

$V_{A_1-ABD}=V_{C_1-BCD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S\cdot h=\frac{1}{6}V_{ABC-A_1B_1C_1}=1$，………………（9 分）

所以 $V_{A_1C_1BD}=6-2-1-1=2$. ………………（10 分）

18. **命题意图**　本题考查平面向量的线性运算，向量在几何中的应用.

解析　（Ⅰ）$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+3(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=-2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}$. …………（3分）

$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=-2\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$. …………（6分）

（Ⅱ）因为$\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，所以$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$， …………（8分）

因为$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)$， …………（10分）

所以$\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$，即$\overrightarrow{BE}$与$\overrightarrow{BM}$共线，即$B,E,M$三点共线. …………（12分）

19. **命题意图**　本题考查复数、向量和三角函数的综合问题.

解析　（Ⅰ）$z_1\cdot z_2=(2\sin\theta-\sqrt{3}\mathrm{i})\cdot[1+(2\cos\theta)\mathrm{i}]=(2\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta)+(4\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3})\mathrm{i}$， …（3分）

$\because z_1\cdot z_2$为实数，$\therefore 4\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3}=0$，$\therefore \sin 2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$， …………（4分）

$\because \theta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，$\therefore 2\theta\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$，

$\therefore 2\theta=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$. …………（6分）

（Ⅱ）由题意得，$\boldsymbol{a}=(2\sin\theta,-\sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(1,2\cos\theta)$. …………（7分）

$\because (2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，

$\therefore (2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{b}^2-5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$， …………（9分）

$\therefore 2(4\sin^2\theta+3)+2(1+4\cos^2\theta)-5(2\sin\theta-2\sqrt{3}\cos\theta)=0$，

整理可得$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}$， …………（10分）

$\because \theta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，$\therefore \theta-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$.

$\therefore \cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{5}$. …………（12分）

20. **命题意图**　本题考查三角函数的图象与性质.

解析　（Ⅰ）$y=\sin x$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后，得到$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象，再将图象上各点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{\omega}$（$\omega\in\mathbf{N}^*$）后，得到$y=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象，所以$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$. …………（2分）

当$x=0$时，$\omega x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，要使$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象在$[0,\pi]$上有且仅有两条对称轴，

则只需$\frac{3\pi}{2}\leqslant\omega\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{2}$，解得$\frac{4}{3}\leqslant\omega<\frac{7}{3}$， …………（5分）

又因为$\omega\in\mathbf{N}^*$，所以$\omega=2$. …………（6分）

所以$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

所以$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$. …………（8分）

(Ⅱ)当 $x\in[0,\pi]$ 时,$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right]$,

函数 $y=\sin x$ 在$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,在$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$上单调递减,在$\left(\frac{3\pi}{2},\frac{13\pi}{6}\right]$上单调递增, ……………(9 分)

令$\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3\pi}{2}$,得$\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$,

所以$f(x)$在$[0,\pi]$上的单调递减区间为$\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$, ……………(11 分)

进而可得单调递增区间为$\left[0,\frac{\pi}{6}\right),\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right]$. ……………(12 分)

21. **命题意图** 本题考查正、余弦定理和三角恒等变换的综合应用.

解析 (Ⅰ)根据已知条件及正弦定理可得 $2\sin A\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=\sin B+\sin C$,

即 $\sin A(\sqrt{3}\sin B+\cos B)=\sin B+\sin(A+B)$,

展开后整理得$\sqrt{3}\sin B\sin A=\sin B+\cos A\sin B$, ……………(2 分)

因为 $\sin B\neq 0$,所以$\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$,即 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$, ……………(4 分)

又 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$, ……………(5 分)

所以 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$,即 $A=\frac{\pi}{3}$. ……………(6 分)

(Ⅱ)由正弦定理可得 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin B$,$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin C$, ……………(7 分)

所以 $bc=\frac{16}{3}\sin B\sin C=\frac{16}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)\sin C$

$=\frac{16}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C\right)\sin C=\frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2C-\frac{1}{2}\cos 2C+\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{8}{3}\sin\left(2C-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{4}{3}$, ……………(9 分)

因为$\triangle ABC$ 为锐角三角形,所以 $0<B=\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2}$,$0<C<\frac{\pi}{2}$,得到$\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$, ……………(10 分)

所以 $2C-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$,$\sin\left(2C-\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$,

所以 bc 的取值范围是$\left(\frac{8}{3},4\right]$. ……………(12 分)

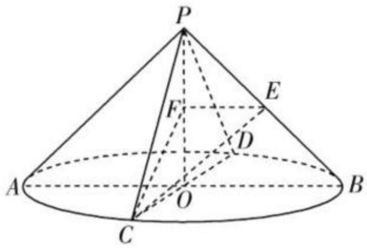
22. **命题意图** 本题考查圆锥的结构特征,以及直线与平面所成角的计算.

解析 (Ⅰ)$AB=4$,即底面圆 O 的半径 $OB=2$,

$\therefore$ 圆锥 PO 的体积为$\frac{1}{3}\times\pi\times 2^2\times PO=\frac{8\pi}{3}$,$\therefore PO=2$, ……………(2 分)

$\therefore$ 母线长 $PB=\sqrt{PO^2+OB^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$, ……………(3 分)

$\therefore$ 圆锥 PO 的侧面积为 $S=\frac{1}{2}\times 4\pi\times PB=\frac{1}{2}\times 4\pi\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}\pi$. ……………(5 分)



(Ⅱ)设 PO 的中点为 F,连接 CF,EF.

$\because E$ 是 PB 的中点,$\therefore EF /\!/ AB$ 且 $EF=\frac{1}{2}OB=1$. ………………………………(6 分)

由已知得 $PO\perp AB$,$CD\perp AB$,$PO\cap CD=O$,

$\therefore AB\perp$ 平面 PCD,$\therefore EF\perp$ 平面 PCD, ………………………………(8 分)

可得 $\angle ECF$ 即为直线 CE 与平面 PCD 所成的角. ………………………………(9 分)

在 $\triangle CEF$ 中,$CF=\sqrt{OC^2+OF^2}=\sqrt{5}$,$CE=\sqrt{CF^2+EF^2}=\sqrt{6}$, ………………………………(10 分)

$\cos\angle ECF=\frac{CF}{CE}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$,

故直线 CE 与平面 PCD 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{30}}{6}$. ………………………………(12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。