

吉林市普通中学 2022—2023 学年度高三毕业年级第三次调研测试

数学试题参考答案

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1	2	3	4	5	6	7	8
A	D	B	C	B	D	A	C

8. 提示：

$$2\lambda e^{2x} + \ln \lambda \geq \ln x \Leftrightarrow 2xe^{2x} \geq \frac{x}{\lambda} \ln \frac{x}{\lambda}$$

易证 $f(t) = te^t$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

$$\therefore f(2x) \geq f\left(\ln \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\therefore 2x \geq \ln \frac{x}{\lambda}, \text{ 即 } \lambda \geq \frac{x}{e^{2x}}$$

易知 $y = \frac{x}{e^{2x}}$ 的最小值为 $\frac{1}{2e}$ ， $\therefore \lambda \geq \frac{1}{2e}$ 。

二、多项选择题：本大题共 4 小题，共 20 分。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9	10	11	12
AD	ABC	BD	BCD

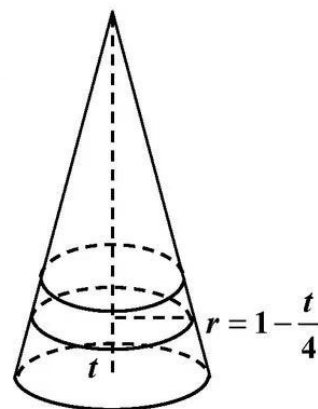
11. 提示：

根据题意，切线方程为 $y = 4x - 4$ ， Ω 的水平截面为圆环，外半径为 $1 + \frac{t}{4}$ ，内半径为 \sqrt{t} ，故

截面面积 $S = (1 + \frac{t}{4})^2 \pi - t\pi = (1 - \frac{t}{4})^2 \pi$ ($0 \leq t \leq 1$), 利用祖暅原理,

可以构造一个上底面半径为 $\frac{3}{4}$, 下底面半径为 1, 高为 1 的圆台。

Ω 与圆台的体积相等, 直接用圆台体积公式求 V , 也可以借助两个圆锥体积之差求 V , 如图。



12. 提示: $\because f(x) = g(2x-1) + 2x, \therefore f'(x) = 2g'(2x-1) + 2$

$\because f(x+1)$ 与 $g(x)$ 均为偶函数

$\therefore f(x) = f(2-x), g(x) = g(-x)$

$\therefore f'(x) + f'(2-x) = 0, g'(x) + g'(-x) = 0$ ①

$\therefore f'(1) = 0, g'(0) = 0$

$\therefore f'(1) = 2g'(1) + 2 = 0, g'(1) = -1$ 即 A 错误;

$\because f'(x) = 2g'(2x-1) + 2$ ②

$\therefore f'(2-x) = 2g'(3-2x) + 2$

将①代入得: $-f'(x) = -2g'(2x-3) + 2$, 即 $f'(x) = 2g'(2x-3) - 2$ ③

由②③得: $g'(2x-3) - g'(2x-1) = 2$

$\because g'(1) = -1, \therefore g'(2023) = -2023$, 即 B 正确;

$\because f'(2) = 2g'(3) + 2 = 2 \times (-3) + 2 = -4$, 即 C 正确;

$\because f'(x) + f'(1-x) = 2g'(2x-1) + 2 + 2g'(1-2x) + 2 = 4$

$$\begin{aligned} & \therefore \sum_{i=1}^{99} f'\left(\frac{i}{100}\right) \\ & = \left[f'\left(\frac{1}{100}\right) + f'\left(\frac{99}{100}\right) \right] + \left[f'\left(\frac{2}{100}\right) + f'\left(\frac{98}{100}\right) \right] + \cdots + \left[f'\left(\frac{49}{100}\right) + f'\left(\frac{51}{100}\right) \right] + f'\left(\frac{50}{100}\right) \\ & = 2 \times 99 = 198 \end{aligned}$$

即 D 正确.

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。其中第 16 题的第一个空填对得 2 分，第二个空填对得 3 分。

13. 120

14. $\sqrt{5}+1$

15. $[\frac{3}{4}, 1] \cup [\frac{15}{4}, 4]$

16. 4 ; $2\sqrt{15}$

(注：可以用不等关系表示)

四、解答题

17. 【解析】

(I) $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 4$ 2 分

令 $2^{n-2} = 1024 = 2^{10}$, 解得: $n = 12$, 不符合题意, 舍去;

令 $3n - 2 = 1024$, 解得: $n = 342$, 符合题意.

因此, 1024 是数列 $\{a_n\}$ 的第 342 项. 5 分

(II) $S_{2n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2n-2} + a_{2n-1}$

$$= \frac{1}{2} + 4 + 2 + 6 + \cdots + (6n - 8) + 2^{2n-3}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + 2 + \cdots + 2^{2n-3}\right) + (4 + 10 + \cdots + 6n - 8)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(1 - 4^n)}{1 - 4} + \frac{(n-1)(4 + 6n - 8)}{2}$$

$$= \frac{1}{6}(4^n - 1) + (n-1)(3n-2) = \frac{4^n}{6} + 3n^2 - 5n + \frac{11}{6} \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

(注：未列举和分组，而直接用和公式的扣2分)

法二： $a_{2n-1} = 2^{2n-3}$ ，又 $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = 4$ ，

所以数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项，4 为公比的等比数列.

$$a_{2n} = 6n - 2, \text{ 又 } a_{2n+2} - a_{2n} = 6,$$

所以数列 $\{a_{2n}\}$ 是以 4 为首项，6 为公差的等差数列.

S_{2n-1} 为数列 $\{a_{2n-1}\}$ 的前 n 项和与数列 $\{a_{2n}\}$ 的前 $n-1$ 项和的总和.

$$S_{2n-1} = \frac{\frac{1}{2}(1-4^n)}{1-4} + \frac{(n-1)(4+6n-8)}{2}$$

$$= \frac{1}{6}(4^n - 1) + (n-1)(3n-2) = \frac{4^n}{6} + 3n^2 - 5n + \frac{11}{6} \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

(注：未用定义证明数列为等比、等差数列，而直接用和公式的扣2分)

18. 【解析】

(I) 由题可知， $\angle AOC = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

在 $\triangle AOC$ 中，由余弦定理得 $AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cos \angle AOC$

$$= 1+1-2 \times 1 \times 1 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + \sqrt{3}$$

$$\therefore AC = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

(注： $AC = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ 此次考试不扣分，但请加以强调结果需化简)

法二：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{\pi}{4}$ ， $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{5\pi}{12}$ ， $AB = \sqrt{2}$

由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{AC}{\sin \frac{5\pi}{12}} \therefore AC = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

(II) 设 $\angle AOB = \theta$, 则 $\angle AOC = \frac{4\pi}{3} - \theta$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\Delta AOB} + S_{\Delta AOC} &= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \theta + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin(\frac{4\pi}{3} - \theta) \\ &= \frac{1}{2} [\sin \theta - \sin(\frac{\pi}{3} - \theta)] \\ &= \frac{1}{2} (\frac{3}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\theta - \frac{\pi}{6}) \end{aligned}$$

\dots\dots\dots 8分

设阴影部分面积为 S , 优弧 BC 所对的扇形 BOC 面积为 $S_{\text{扇形}}$,

$$\text{则 } S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2} \times 1^2 \times (2\pi - \frac{2\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore S = S_{\text{扇形}} - (S_{\Delta AOB} + S_{\Delta AOC}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\theta - \frac{\pi}{6}) + \frac{2\pi}{3} \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

$$\because \text{点 } O \text{ 在 } \Delta ABC \text{ 内部} \therefore \frac{\pi}{3} < \theta < \pi \therefore \frac{\pi}{6} < \theta - \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{当 } \theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ 时, 即 } \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ 时, } S_{\min} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{即阴影部分面积的最小值是 } \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

法二: $S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2} OB \cdot OC \sin \angle BOC = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\text{劣弧 } BC \text{ 所对的扇形的面积 } S_{\text{扇形}BOC} = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3} \times 1^2 = \frac{\pi}{3}$$

$$S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形}BOC} - S_{\Delta BOC} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

设 $AB = c, AC = b, BC = a$

在 ΔBOC 中, 由余弦定理: $BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB \cdot OC \cos \angle BOC = 3$

$\therefore BC = \sqrt{3}$ 即 $a = \sqrt{3}$ 8 分

在 ΔABC 中, 由余弦定理: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle BAC$

$$\therefore 3 = b^2 + c^2 - bc \geq 2bc - bc = bc$$

$\therefore bc \leq 3$, 当且仅当 $b = c = \sqrt{3}$ 时, 等号成立 10 分

阴影部分面积为 $S = \pi - S_{\text{弓形}} - S_{\Delta ABC}$

$$= \pi - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{1}{2}bc \sin \angle BAC$$

$$= \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}bc$$

$$\geq \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

即阴影部分面积的最小值是 $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 12 分

19. 【解析】

(I) 证明: 取 AD 中点 H , 连接 EH, HO .

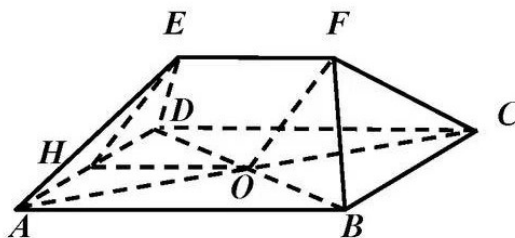
$\because O$ 是 BD 中点 $\therefore HO \parallel \frac{1}{2}AB$

$\because EF \parallel$ 平面 $ABCD$,

$EF \subset$ 平面 $ABFE$,

平面 $ABCD \cap$ 平面 $ABFE = AB$

$\therefore EF \parallel AB \quad \because AB = 2EF$



$\therefore EF \perp \frac{1}{2}AB \quad \therefore HO \perp EF \quad \therefore$ 四边形 $EFOH$ 是平行四边形

$\therefore FO \parallel EH \quad \because EH \subset$ 平面 $ADE, FO \not\subset$ 平面 ADE

$\therefore FO \parallel$ 平面 ADE 4 分

(注: 也可以用面面平行证明)

(II) $\because AE = ED \therefore EH \perp AD$

$\because OH \perp AD, OH \cap EH = H \therefore AD \perp$ 平面 $EFOH$

$\because AD \subset$ 平面 $ABCD \therefore$ 平面 $ABCD \perp$ 平面 $EFOH$

在平面 $EFOH$ 中, 过 O 作 $OG \perp OH$

平面 $ABCD \cap$ 平面 $EFOH = HO \therefore OG \perp$ 平面 $ABCD$

取 AB 中点 N , 取 BC 中点 Q , 连接 ON, OQ .

以 O 为原点, ON, OQ, OG 所在直线为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系..... 6 分

如图,

则 $A(\sqrt{2}, -2, 0), B(\sqrt{2}, 2, 0), C(-\sqrt{2}, 2, 0), D(-\sqrt{2}, -2, 0), E(0, -1, \sqrt{2}), F(0, 1, \sqrt{2})$

$\overrightarrow{AD} = (-2\sqrt{2}, 0, 0), \overrightarrow{AE} = (-\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}),$

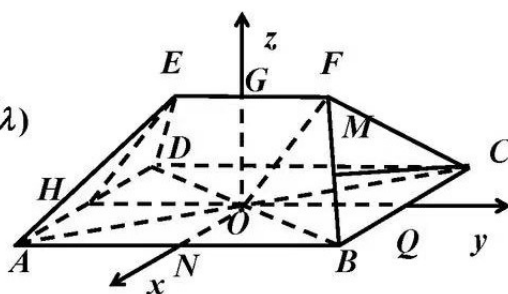
$\overrightarrow{BF} = (-\sqrt{2}, -1, \sqrt{2})$

设 $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{BF} = \lambda(-\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}) = (-\sqrt{2}\lambda, -\lambda, \sqrt{2}\lambda)$

$(0 \leq \lambda \leq 1)$

$\therefore M(\sqrt{2} - \sqrt{2}\lambda, 2 - \lambda, \sqrt{2}\lambda)$

$\therefore \overrightarrow{CM} = (2\sqrt{2} - \sqrt{2}\lambda, -\lambda, \sqrt{2}\lambda)$ 8 分



设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 是平面 ADE 的一个法向量

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} -2\sqrt{2}x = 0 \\ -\sqrt{2}x + y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \therefore \vec{n} = (0, -\sqrt{2}, 1) \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

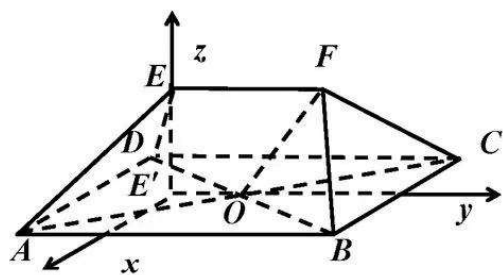
$$\therefore \cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{CM} \rangle = \frac{2\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{(2\sqrt{2} - \sqrt{2}\lambda)^2 + \lambda^2 + 2\lambda^2}} = \frac{2\sqrt{14}}{21}$$

化简得: $2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \therefore \lambda = \frac{1}{2}$ 或 -1 (舍)

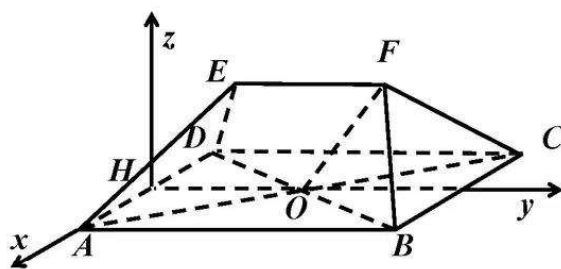
当 M 是 BF 的中点时, 使得 CM 与平面 ADE 所成角正弦值为 $\frac{2\sqrt{14}}{21}$ 12 分

(说明: (1) 建系方法不限, 阅卷参考: 若按下图①图②建系, 平面 ADE 法向量均为: $\vec{n} = (0, -\sqrt{2}, 1)$;

(2) (I) 也可用空间向量法证明)



图①



图②

20. 【解析】

(I) 零假设为 H_0 : 该球队胜利与甲球员参赛无关..... 1 分

$$\chi^2 = \frac{50 \times (2 \times 10 - 30 \times 8)^2}{10 \times 40 \times 32 \times 18} = \frac{3025}{288} \approx 10.503 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

因为 $\chi^2 > 7.879$ 4 分

所以依据 $\alpha = 0.005$ 的独立性检验, 我们推断 H_0 不成立, 所以认为该球队胜利与甲球员参赛

有关, 此推断犯错误的概率不大于 0.005 6 分

(II) (i) 证明:

$$\begin{aligned} R &= \frac{P(B|A) \cdot P(\bar{B}|\bar{A})}{P(\bar{B}|A) \cdot P(B|\bar{A})} = \frac{P(AB) \cdot P(\bar{A}\bar{B})}{P(A\bar{B}) \cdot P(\bar{A}B)} = \frac{P(AB)}{P(A\bar{B})} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A}B)} \\ &= \frac{P(AB)}{P(\bar{A}\bar{B})} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A}B)} = \frac{P(AB)}{P(\bar{A}\bar{B})} \cdot \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A}B)} = \frac{P(A|B) \cdot P(\bar{A}|\bar{B})}{P(\bar{A}|B) \cdot P(A|\bar{B})} \end{aligned}$$

..... 8 分

(ii) $P(A|B) = \frac{1}{5}$ 9分

$P(A|\bar{B}) = \frac{3}{4}$ 10分

$R = \frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} \cdot \frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{5} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{12}$ 12分

21. 【解析】

(I) 设点 $P(x, y)$, 则 $M(x, -1)$.

由题知 $|PF| = |PM|$,

即: $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = |y+1|$.

整理得: $x^2 = 4y$.

则曲线 C 的方程为 $x^2 = 4y$ 4分

法二: 由题知, 点 P 到点 $F(0,1)$ 的距离等于其到直线 $y = -1$ 的距离相等,

则点 P 的轨迹为以 $F(0,1)$ 为焦点, 以 $y = -1$ 为准线的抛物线.

则曲线 C 的方程为 $x^2 = 4y$ 4分

(II) 由题, AB 为圆 $x^2 + (y+2)^2 = 4$ 的直径, 则 $OA \perp OB$.

易知直线 OA 存在斜率, 设为 k , 且 $k \neq 0$, 则直线 OB 的斜率为 $-\frac{1}{k}$.

又有, OA 所在直线为 $y = kx$,

联立 $\begin{cases} x^2 = 4y \\ y = kx \end{cases}$, 解得: $x_1 = 0$ 或 $x_2 = 4k$.

联立 $\begin{cases} x^2 + (y+2)^2 = 4 \\ y = kx \end{cases}$, 解得: $x_3 = 0$ 或 $x_4 = \frac{-4k}{1+k^2}$ 6分

所以, $|AS| = \sqrt{1+k^2} |x_2 - x_4| = \sqrt{1+k^2} \frac{|4k(k^2+2)|}{1+k^2} = \frac{4|k|(k^2+2)}{\sqrt{1+k^2}}$.

同理可得, $|BT| = \frac{4|-\frac{1}{k}| [(-\frac{1}{k})^2 + 2]}{\sqrt{1+(-\frac{1}{k})^2}} = \frac{4(2k^2+1)}{k^2\sqrt{1+k^2}}$ 8分

四边形 $ABST$ 的面积

$$s = \frac{1}{2} |AS| \cdot |BT| = \frac{8(2+k^2)(2k^2+1)}{|k|(k^2+1)} = \frac{8(2k^4+5k^2+2)}{|k|k^2+|k|}$$

$$= \frac{8(2k^2 + \frac{2}{k^2} + 5)}{|k| + \frac{1}{|k|}} = \frac{8[2(|k| + \frac{1}{|k|})^2 + 1]}{|k| + \frac{1}{|k|}}$$
 10分

令 $t = |k| + \frac{1}{|k|}, t \in [2, +\infty)$. $s = \frac{8(2t^2+1)}{t} = 8(2t + \frac{1}{t})$.

因为 s 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增, 所以当 $t = 2$ 时, s 有最小值 36 .

即, 当 $k = \pm 1$ 时, 四边形 $ABST$ 面积的最小值为 36 12分

法二: 略解

由 $\begin{cases} x = my \\ x^2 = 4y \end{cases}$ 得 $y_S = \frac{4}{m^2}$.

由 $\begin{cases} x = my \\ x^2 + (y+2)^2 = 4 \end{cases}$ 得 $y_A = \frac{-4}{m^2+1}$ 6分

$\therefore |AS| = \sqrt{1+m^2} |y_S - y_A| = \frac{4(2m^2+1)}{m^2\sqrt{1+m^2}}$.

同理可得: $|BT| = \frac{4(\frac{2}{m^2}+1)}{\frac{1}{m^2}\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}} = \frac{4(2+m^2)|m|}{\sqrt{m^2+1}}$ 8分

$$S_{\text{四边形}ABST} = \frac{1}{2} |AS| |BT|$$

$$= \frac{8(2m^2+1)(2+m^2)}{|m|(m^2+1)} = \frac{8(2m^2+5+\frac{2}{m^2})}{|m|+\frac{1}{|m|}} \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

令 $t = |m| + \frac{1}{|m|} \geq 2$

$S(t) = \frac{8(2t^2+1)}{t} = 8(2t + \frac{1}{t})$ 在 $t \in [2, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore S(t)_{\min} = 8 \times (\frac{1}{2} + 4) = 36$, 即四边形 $ABST$ 面积的最小值为 36 . $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

22. 【解析】

(I) $m(x) = e^x \sin x$, $m'(x) = (\sin x + \cos x)e^x = \sqrt{2}e^x \sin(x + \frac{\pi}{4}) \dots\dots\dots 2 \text{分}$

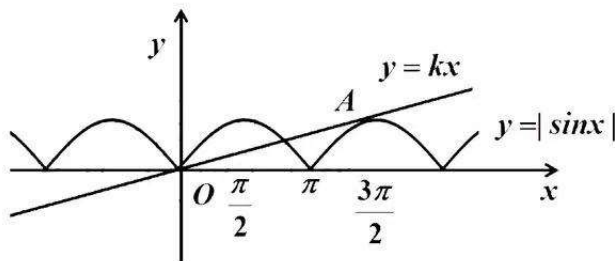
令 $m'(x) > 0$, 则 $0 < x < \frac{3\pi}{4}$; 令 $m'(x) < 0$, 则 $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$.

$\therefore m(x)$ 在 $(0, \frac{3\pi}{4})$ 上单调递增, 在 $(\frac{3\pi}{4}, \pi)$ 上单调递减. $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

$\therefore m(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上的最大值为: $m(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \dots\dots\dots 5 \text{分}$

(II) 证明: $y = |g(x)|$ 的图像与直线 $y = kx (k > 0)$ 的三个公共点如图所示, 且在 $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ 内相切,

其切点为: $A(\alpha, -\sin \alpha), \alpha \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$. $\dots\dots\dots 7 \text{分}$



当 $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ 时, $y = |g(x)| = -\sin x$, $y' = -\cos x$, $y'|_{x=\alpha} = -\cos \alpha$.

$\therefore -\cos \alpha = \frac{-\sin \alpha}{\alpha}$, 即 $\alpha = \tan \alpha$ 9 分

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha} &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \cos(\alpha + 2\alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha} \\ &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha(1 + \cos 2\alpha) - \sin \alpha \sin 2\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha(1 + 2\cos^2 \alpha - 1) - \sin \alpha \cdot 2\sin \alpha \cos \alpha} \\ &= \frac{\sin \alpha}{2\cos^3 \alpha - 2\sin^2 \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{2\cos \alpha(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} = \frac{\tan \alpha(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} \\ &= \frac{\tan \alpha(1 + \tan^2 \alpha)}{2(1 - \tan^2 \alpha)} = \frac{\alpha(1 + \alpha^2)}{2(1 - \alpha^2)} \end{aligned}$$

得证..... 12 分

法二:

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha} &= \frac{\sin \alpha}{\cos(2\alpha - \alpha) + \cos(\alpha + 2\alpha)} = \frac{\sin \alpha}{2\cos 2\alpha \cos \alpha} \\ &= \frac{\tan \alpha}{2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} = \frac{\tan \alpha(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} \\ &= \frac{\tan \alpha(1 + \tan^2 \alpha)}{2(1 - \tan^2 \alpha)} = \frac{\alpha(1 + \alpha^2)}{2(1 - \alpha^2)} \end{aligned}$$

得证..... 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线