

佩佩教育·2023 年普通高校招生统一考试
湖南四大名校名师团队模拟冲刺卷(1)

数学参考答案

1. B 【解析】因为 $B = \{x | (x-1)(x-4) > 0\} = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 4\}$, $A = \{x | a-2 < x < a+3\}$,

又 $A \cup B = \mathbf{R}$, 所以只需 $\begin{cases} a-2 < 1 \\ a+3 > 4 \end{cases}$, 解得 $1 < a < 3$, 故选 B.

2. D 【解析】由 $(1-i) \cdot z = 1 + (a-1)i$, 得 $z = \frac{1+(a-1)i}{1-i} = \frac{(1+(a-1)i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+(a-1)i)(1+i)}{2} = \frac{1-(a-1) + (1+(a-1)i)i}{2} = \frac{2-a + \frac{a}{2}i}{2}$ 又 z 为纯虚数, 则 $a=2$, 故选 D.

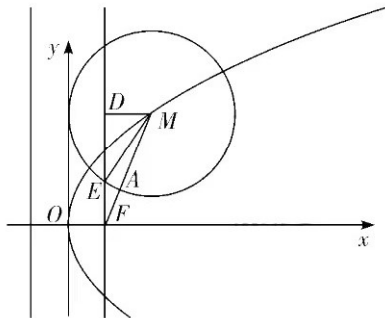
3. A 【解析】由 $f(x) = e^{x-1} + ax^2 + 1$, 得 $f'(x) = e^{x-1} + 2ax$, 因为函数 $f(x) = e^{x-1} + ax^2 + 1$ 的图象在 $x=1$ 处的切线与直线 $x+3y-1=0$ 垂直, 所以 $f'(1)=3$, 则 $a=1$, 故选 A.

4. D 【解析】由题意可知: $\frac{d}{t} = \frac{1}{80}$, $\tan \frac{\angle AOB}{2} = \frac{\frac{d}{2}}{t} = \frac{1}{160}$,

所以 $\tan \angle AOB = \frac{2 \tan \frac{\angle AOB}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\angle AOB}{2}} = \frac{\frac{1}{80}}{1 - \frac{1}{160^2}} = \frac{320}{160^2 - 1}$. 故选 D.

5. A 【解析】由题可得 $g(x) = 2\cos\left(\frac{1}{\omega}x - \varphi\right)$, 若满足 $|g(x_1) - g(x_2)| = 4$, 则 x_1 和 x_2 必然一个极大值点, 一个极小值点, 又 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{4}$, 则 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{4}$, 即 $T = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{1}{\omega} = \frac{2\pi}{T} = 4$, 所以 $\omega = \frac{1}{4}$ 故选 A.

6. C 【解析】如图所示, $M(x_0, \sqrt{10})$ 在抛物线上, 则 $10 = 2px_0 \Rightarrow px_0 = 5 \dots \dots \textcircled{1}$



易知, $|DM| = x_0 - \frac{p}{2}$, 由 $\frac{|MA|}{|AF|} = 2 \Rightarrow |MA| = 2|AF| = \frac{2}{3}|MF| = \frac{2}{3}\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)$,

因为被直线 $x = \frac{p}{2}$ 截得的弦长为 $\sqrt{3}|MA|$, 则 $|DE| = \frac{\sqrt{3}}{2}|MA| = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)$,

由 $|MA| = |ME| = r$, 于是在 $\text{Rt}\triangle MDE$ 中,

$\frac{1}{3}\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{4}{9}\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow x_0 = p \dots \dots \textcircled{2}$

由 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 解得: $x_0 = p = \sqrt{5}$, 所以 $|AF| = \frac{1}{3}\left(x_0 + \frac{p}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 故选 C.



7. A 【解析】连接 PQ, QA , 由 $PB=PC=AB=BC=AC=2$, 可知: $\triangle ABC$ 和 $\triangle PBC$ 是等边三角形, 设三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心为 O , 所以球心 O 到平面 ABC 和平面 PBC 的射影是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PBC$ 的中心 F, E , $\triangle PBC$ 是等边三角形, Q 为 BC 中点,

所以 $PQ \perp BC$, 又因为侧面 $PBC \perp$ 底面 ABC , 侧面 $PBC \cap$ 底面 $ABC = BC$,

所以 $PQ \perp$ 底面 ABC , 而 $AQ \subset$ 底面 ABC , 因此 $PQ \perp AQ$, 所以 $OFQE$ 是矩形.

$\triangle ABC$ 和 $\triangle PBC$ 是边长为 2 的等边三角形, 所以两个三角形的高 $h = \sqrt{2^2 - \left(\frac{1}{2} \times 2\right)^2} = \sqrt{3}$,

在矩形 $OFQE$ 中, $OE = FQ = \frac{1}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $AE = \frac{2}{3}h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 连接 OA ,

所以 $OA = \sqrt{OE^2 + EA^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{3}$, 设过点 Q 的平面为 α , 当 $OQ \perp \alpha$

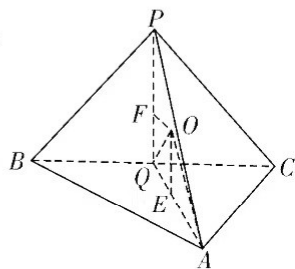
时, 此时所得截面的面积最小, 该截面为圆形,

$$OQ = \sqrt{OF^2 + FQ^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}h\right)^2 + \left(\frac{1}{3}h\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

因此圆 Q 的半径为: $\sqrt{OA^2 - OQ^2} = \sqrt{\frac{15}{9} - \frac{6}{9}} = 1$, 所以此时面积为 $\pi \cdot 1^2 = \pi$;

当点 Q 在以 O 为圆心的大圆上时, 此时截面的面积最大, 面积为: $\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^2 =$

$\frac{5\pi}{3}$, 所以截面的面积范围为: $\left[\pi, \frac{5\pi}{3}\right]$, 故选 A.



8. A 【解析】因为 $a = \frac{5(2 - \ln 5)}{e^2} = \frac{\ln \frac{e^2}{5}}{e^2}$, $b = \frac{1}{e} = \frac{\ln e}{e}$, $c = \frac{\ln 4}{4}$, 构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$,

$$\text{则 } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, a = f\left(\frac{e^2}{5}\right), b = f(e), c = f(4),$$

$f(x)$ 在 $(0, e)$ 上递增, 在 $(e, +\infty)$ 上递减, 则有 $b = f(e)$ 最大, 即 $a < b, c < b$.

因为 $f(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2} = f(2)$, 又 $\frac{e^2}{5} < 2 < e$, 所以 $f\left(\frac{e^2}{5}\right) < f(2)$, 所以 $c > a$,

故 $a < c < b$, 故选 A.

9. ACD 【解析】由正态分布的性质得 $P(25.35 < \xi < 25.45) = 1 - 2P(\xi \geq 24.45) = 1 - 2 \times 0.1 = 0.8$, 由上知 1 件产品的质量指标值 ξ 不位于区间 $(25.35, 25.45)$ 的概率为 $P = 0.2$, 所以 $\xi \sim B(3, 0.2)$, 所以 $E(X) = 3 \times 0.2 = 0.6$, $D(X) = 3 \times 0.2 \times 0.8 = 0.48$, $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.8^3 = 0.488$. 故选 ACD.

10. BC 【解析】如图 1, 取 CD 的中点 Q , 连接 EQ, FQ , 由 E, F 分别是 PC, AB 的中点, 易知平面 $EFQ \parallel$ 平面 PAD , 所以 $EF \parallel$ 平面 PAD , 所以异面直线 EF, PD 所成角为 $\frac{\pi}{2}$. 故 A 错误;

设正方形 $ABCD$ 的中心为 O , 连接 OC, PO , 则 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, $OC = OP = 2$. 设 OC 的中点为 H , 连接 EH, FH , 则 $EH \parallel OP$, 且 $EH \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $\angle EFH$ 为直线 EF 与平面 $ABCD$ 所成角, 所以 $EH = \frac{1}{2}PO = 1$. $\triangle OFH$ 中, $OH = 1, OF = \sqrt{2}, \angle FOC = 135^\circ$,

所以由余弦定理可得 $FH = \sqrt{5}$, 所以 $EF = \sqrt{EH^2 + FH^2} = \sqrt{6}$,

所以 $\sin \angle EFH = \frac{EH}{EF} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$ 故 B 正确.

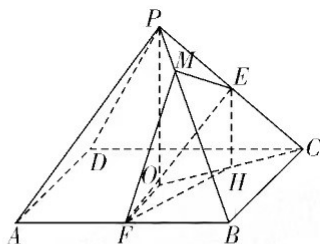


图1

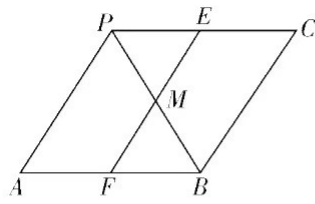


图2

将正 $\triangle PAB$ 和 $\triangle PBC$ 沿 PB 翻折到一个平面内,如图2,当 E, M, F 三点共线时, $ME+MF$ 取得最小值,此时,点 M 为 PB 的中点, $ME+MF=BC=2\sqrt{2}$,所以 $\triangle EMF$ 周长的最小值为 $\sqrt{6}+2\sqrt{2}$,故C正确.

若 $PB \perp$ 平面 MEF ,则 $PB \perp ME$,此时点 M 为 PB 上靠近点 P 的四等分点,而此时, PB 与 FM 显然不垂直,故D错误.故选BC.

11. BD 【解析】因为正数 a, β 满足 $e^a + \frac{1}{2\beta + \sin \beta} > e^\beta + \frac{1}{2a + \sin a}$.

所以 $e^a - \frac{1}{2a + \sin a} > e^\beta - \frac{1}{2\beta + \sin \beta}$,构造函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2x + \sin x}, x > 0$.

令 $g(x) = 2x + \sin x, g'(x) = 2 + \cos x > 0$ 恒成立,所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

由复合函数的单调性可知 $y = -\frac{1}{2x + \sin x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,所以 $f(x) = e^x - \frac{1}{2x + \sin x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,由 $f(a) > f(\beta)$,可得 $a > \beta > 0$.

对于A, $(\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta})(a + \beta) = 2 + \frac{a}{\beta} + \frac{\beta}{a} > \sqrt{\frac{a}{\beta} \cdot \frac{\beta}{a}} = 4$,所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} > \frac{4}{a + \beta}$,故A错误;

对于B,由 $a > \beta$,可得 $a - \beta + 1 > 1$,所以 $2^{a - \beta + 1} > 2$,故B正确;

对于C,由 $a > \beta > 0$,可得 $\ln a > \ln \beta$,则 $\ln a + a > \ln \beta + \beta$,故C错误;

对于D,由 $a > \beta > 0$,可得 $e^a > e^\beta > 0, \frac{1}{a} < \frac{1}{\beta}$,所以 $\frac{1}{e^a} < \frac{1}{e^\beta}$,所以 $\frac{1}{e^a} + \frac{1}{a} < \frac{1}{e^\beta} + \frac{1}{\beta}$,故D正确.故选BD.

12. ACD 【解析】 $\because F_1(-c, 0)$ 到 $y = \sqrt{3}x$ 的距离为 $3\sqrt{3}, \therefore \frac{\sqrt{3}c}{2} = 3\sqrt{3}$,解得 $c = 6$.

又渐近线方程为 $y = \sqrt{3}x$,则 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$,结合 $a^2 + b^2 = c^2$ 可解得 $a = 3, b = 3\sqrt{3}$.

则双曲线的方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$,故A正确;

$\because PQ$ 为 $\angle F_1PF_2$ 的平分线, $\therefore \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|QF_1|}{|QF_2|} = \frac{8}{4} = 2$,故B错误;

由双曲线定义可得 $|PF_1| - |PF_2| = 6$,则可得 $|PF_1| = 12, |PF_2| = 6$.

则在 $\triangle PF_1F_2$ 中, $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{12^2 + 6^2 - 12^2}{2 \times 12 \times 6} = \frac{1}{4}$.

则 $|\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}|^2 = \overrightarrow{PF_1}^2 + 2\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} + \overrightarrow{PF_2}^2 = 12^2 + 2 \times 12 \times 6 \times \frac{1}{4} + 6^2 = 216$.

则 $|\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}| = 6\sqrt{6}$,即 $|OP| = 3\sqrt{6}$,故C正确;

在 $\triangle PF_1F_2$ 中, $\sin \angle F_1PF_2 = \sqrt{1 - \cos^2 \angle F_1PF_2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

设点 P 到 x 轴的距离为 d ,则 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \times |F_1F_2| \times d = \frac{1}{2} |PF_1| \times |PF_2| \times \sin \angle F_1PF_2$,

即 $\frac{1}{2} \times 12 \times d = \frac{1}{2} \times 12 \times 6 \times \frac{\sqrt{15}}{4}$,解得 $d = \frac{3\sqrt{15}}{2}$,故D正确.故选ACD.

13. $\frac{3a}{2}$ 或 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 【解析】因向量 $a=(1, \sqrt{3}), b=(3, \sqrt{3})$, 则有 $|b| \cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a|} = \frac{1 \times 3 + \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = 3$,

所以 b 在 a 方向上的投影是 $3 \cdot \frac{a}{|a|}$, 即 $\frac{3a}{2}$ 或 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

14. $\frac{3}{5}$ 【解析】因为甲罐中有 3 个红球、2 个黑球, 所以 $P(A) = \frac{2}{5}$,

因为 $P(AB) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$, 所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}$.

15. $\frac{7}{2}$ 【解析】设点 $P(m, n), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(-1, 0)$, 因为分别以点 A, B 为切点作圆 C 的切线 l_1 ,

l_2 , 设直线 l_1, l_2 的交点为 P , 所以 $CA \perp AP$, 则 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$,

即 $(x_1 + 1)(m - x_1) + y_1(n - y_1) = 0$, 所以 $x_1^2 + x_1 - mx_1 - m + y_1^2 - y_1n = 0$, 因为 $(x_1 + 1)^2 + y_1^2 = 9$,

所以 $(m + 1)x_1 + ny_1 + m - 8 = 0$, 即 (x_1, y_1) 是方程 $(m + 1)x + ny + m - 8 = 0$ 的解,

所以点 $A(x_1, y_1)$ 在直线 $(m + 1)x + ny + m - 8 = 0$ 上, 同理可得 $B(x_2, y_2)$ 在直线 $(m + 1)x + ny + m - 8 = 0$ 上, 所以切点弦 AB 的方程为 $(m + 1)x + ny + m - 8 = 0$,

因为直线 AB 与圆 O 相切, 所以 $\frac{|(m + 1) \times 0 + n \times 0 + m - 8|}{\sqrt{(m + 1)^2 + n^2}} = 1$, 解得 $n^2 = 63 - 18m \geq 0$, 得 $m \leq \frac{7}{2}$,

即 m 的最大值为 $\frac{7}{2}$.

16. $(0, 2)$ -4 【解析】由题意, 正数数列 $\{a_n\}$ 是单调递增数列, 且 $a_{n+1}^2 - a_{n+1} = a_n$, $\therefore a_n - a_{n+1} = a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} < 0$ 且 $a_{n+1}^2 - a_{n+1} = a_n > 0$, 解得 $a_{n+1} \in (1, 2)$, $\therefore a_2 \in (1, 2)$, $\therefore a_1 = a_2^2 - a_2 \in (0, 2)$

又由 $a_{n+1}^2 - a_{n+1} = a_n$, 可得: $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}^2 - a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1} - 1} - \frac{1}{a_{n+1}}$, $\therefore \frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}$, $\therefore b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{a_n - 1}$,

$\therefore b_1 + b_2 + \dots + b_{21} = \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_2 - 1} + \frac{1}{a_3 - 1} - \dots + \frac{1}{a_{21} - 1}$

$= \frac{1}{a_1 - 1} - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) - \dots - \left(\frac{1}{a_{19}} + \frac{1}{a_{20}}\right) + \left(\frac{1}{a_{20}} + \frac{1}{a_{21}}\right)$

$= \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \dots - \frac{1}{a_{19}} - \frac{1}{a_{20}} + \frac{1}{a_{20}} + \frac{1}{a_{21}} = \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_{21}} = -\frac{9}{2} + \frac{1}{a_{21}}$.

$\therefore a_1 = \frac{2}{3}$, 且数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, $\therefore a_{21} \in (1, 2)$, 即 $\frac{1}{a_{21}} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$,

$\therefore -4 < -\frac{9}{2} + \frac{1}{a_{21}} < -\frac{7}{2}$, $\therefore$ 整数 $k = -4$.

17. 【解析】(1) 当 $n \geq 2$ 时, $S_n^2 = a_n S_n - a_n$, 所以, $S_n^2 = (S_n - S_{n-1}) S_n - (S_n - S_{n-1})$,

整理得: $S_n S_{n-1} = S_{n-1} - S_n$, 即 $\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = 1$.

所以数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是以 $\frac{1}{S_1} = \frac{1}{a_1} = 2$ 为首项, 1 为公差的等差数列.

所以 $\frac{1}{S_n} = n + 1$, 即 $S_n = \frac{1}{n + 1}$ 5 分

(2) 由 (1) 知, $\frac{2^n}{S_n} = (n + 1) \cdot 2^n$,

所以 $T_n = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1} + (n + 1) \cdot 2^n$, ①

所以 $2T_n = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n + (n+1) \cdot 2^{n+1}$, ②

①-②得, $-T_n = 4 + (2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - (n+1) \cdot 2^{n+1}$,

所以, $-T_n = 4 + (2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - (n+1) \cdot 2^{n+1} = -n \cdot 2^{n+1}$,

所以, $T_n = n \cdot 2^{n+1}$, 10 分

18. 【解析】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由三角形面积公式得 $S = \frac{1}{2}bc\sin A$,

由正弦定理得: $2 \times \frac{1}{2}bc\sin A \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right) = (a^2 + b^2)\sin A$,

整理得: $a^2 + b^2 - c^2 = ab$, 由余弦定理得: $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$,

又 $0 < C < \pi$, 故 $C = \frac{\pi}{3}$ 5 分

(2) 因为 $a = \sqrt{3}$, $C = \frac{\pi}{3}$, 由正弦定理得 $c = \frac{3}{2\sin A}$, $b = \frac{\sqrt{3}\sin B}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}\sin(\frac{2}{3}\pi - A)}{\sin A} = \frac{3\cos A}{2\sin A} + \frac{\sqrt{3}}{2}$,

即 $\triangle ABC$ 的周长 $l = a + b + c = \frac{3}{2\sin A} + \frac{3\cos A}{2\sin A} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3(1 + \cos A)}{2\sin A} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{6\cos^2 \frac{A}{2}}{4\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} + \frac{3\sqrt{3}}{2} =$

$\frac{3}{2\tan \frac{A}{2}} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 因为 $A \in (0, \frac{2\pi}{3})$, 则 $\frac{A}{2} \in (0, \frac{\pi}{3})$, 故 $0 < \tan \frac{A}{2} < \sqrt{3}$,

所以 $\frac{3}{2\tan \frac{A}{2}} + \frac{3\sqrt{3}}{2} > 2\sqrt{3}$, 即 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围是 $(2\sqrt{3}, +\infty)$ 12 分

19. 【解析】(1) $\because PO$ 垂直于圆锥的底面, $\therefore PO \perp AD$,

当 $CD = CO$ 时, $CD = OC = AC$, $\therefore AD \perp OD$, 又 $OD \cap PO = O$,

$\therefore AD \perp$ 平面 POD , 又 $AD \subset$ 平面 PAD , $\therefore$ 平面 $PAD \perp$ 平面 POD 5 分

(2) 由题可知 $OA = OB = 4$, $\therefore PB = 4\sqrt{2}$, $\therefore PO = 4$,

当三棱锥 $P-BCD$ 的体积最大时, $\triangle DBC$ 的面积最大, 此时 D 为 $\widehat{BC}$ 的中点,

如图, 以点 O 为坐标原点, 过 O 点且垂直 AB 的直线为 x 轴, OB, OP 分别为 y 轴, z 轴, 建立空间直角坐标系 $O-xyz$,

则 $A(0, -4, 0), B(0, 4, 0), P(0, 0, 4), D(3, 1, 0)$,

$\therefore \vec{BP} = (0, -4, 4), \vec{PD} = (3, 1, -4), \vec{AP} = (0, 4, 4)$,

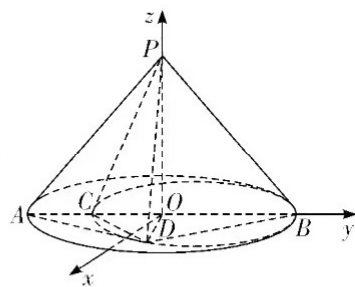
设平面 PAD 的法向量为 $\vec{n}_1 = (a, b, c)$,

则 $\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{AP} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{PD} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 4b + 4c = 0 \\ 3a + b - 4c = 0 \end{cases}$, 令 $a = 5$, 则 $b = -3, c = 3$,

$\therefore \vec{n}_1 = (5, -3, 3)$,

设平面 PBD 的法向量 $\vec{n}_2 = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{BP} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{PD} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} -4y + 4z = 0 \\ 3x + y - 4z = 0 \end{cases}$, 令 $x = 1$, 则 $y = 1, z = 1$, $\therefore \vec{n}_2 = (1, 1, 1)$,



$$\text{则 } \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{5-3+3}{\sqrt{3} \times \sqrt{5^2+(-3)^2+3^2}} = \frac{5\sqrt{129}}{129}.$$

∴二面角 $B-PD-A$ 的余弦值为 $-\frac{5\sqrt{129}}{129}$ 12 分

20. 【解析】(1)由题意,乙同学得 100 分的基本事件有 {乙抢到两题且一道正确一道错误}, {甲乙各抢到一题都

回答正确}, {甲抢到两题且回答错误}, 所以乙同学得 100 分的概率为 $p=2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{37}{100}$ 5 分

(2)由题意,甲同学的累计得分 X 可能值为 {0, 50, 100, 150, 200}, 6 分

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{4}{25};$$

$$P(X=50) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{4}{25};$$

$$P(X=100) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25};$$

$$P(X=150) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}; P(X=200) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{25}; \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

分布列如下:

X	0	50	100	150	200
$P(X)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$\text{所以期望 } E(X) = 0 \times \frac{4}{25} + 50 \times \frac{4}{25} + 100 \times \frac{9}{25} + 150 \times \frac{4}{25} + 200 \times \frac{4}{25} = 100.$$

21. 【解析】(1)由已知 $B_1(0,1), B_2(0,-1)$, 设 $M(x_1, y_1), D(x_4, y_4)$,

因为 $MB_1 \perp B_1D, MB_2 \perp B_2D$, 所以 $x_1x_4 + (y_1-1)(y_4-1) = 0, x_1x_4 + (y_1+1)(y_4+1) = 0$,

两式相减得 $y_4 = -y_1$, 代入原式得 $x_1x_4 + 1 - y_1^2 = 0$,

因为 $\frac{x_1^2}{a^2} + y_1^2 = 1$, 所以 $x_4 = -\frac{x_1}{a^2}$, 又 $-a \leq x_1 \leq a$

$$S = S_{\triangle MB_1B_2} + S_{\triangle DB_1B_2} = |x_1| + |x_4| = \left(1 + \frac{1}{a^2}\right) |x_1| \leq a + \frac{1}{a},$$

因为 S 的最大值为 $\frac{5}{2}$, 所以 $a + \frac{1}{a} = \frac{5}{2}$, 得 $a=2$ 或 $a=\frac{1}{2} < 1$ 舍. 5 分

(2)由(1)可知,直线 l 的方程为 $x=my+1$,

取 $m=0$, 可得 $P\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), Q\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

可得直线 A_1P 的方程为 $y = \frac{\sqrt{6}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$, 直线 A_2Q 的方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{3}$

联立方程组, 可得交点为 $S_1(4, \sqrt{3})$;

若 $P\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), Q\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 由对称性可知交点 $S_2(4, -\sqrt{3})$,

若点 S 在同一直线上, 则直线只能为 $l: x=4$ 上, 6 分



以下证明:对任意的 m , 直线 A_1P 与直线 A_2Q 的交点 S 均在直线 $l: x=4$ 上.

$$\text{由 } \begin{cases} x=my+1 \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}, \text{ 整理得 } (m^2+4)y^2+2my-3=0$$

$$\text{设 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), \text{ 则 } y_1+y_2=\frac{-2m}{m^2+4}, y_1y_2=\frac{-3}{m^2+4}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{设 } A_1P \text{ 与 } l \text{ 交于点 } S_0(4, y_0), \text{ 由 } \frac{y_0}{4+2}=\frac{y_1}{x_1+2}, \text{ 可得 } y_0=\frac{6y_1}{x_1+2}$$

$$\text{设 } A_2Q \text{ 与 } l \text{ 交于点 } S'_0(4, y'_0), \text{ 由 } \frac{y'_0}{4-2}=\frac{y_2}{x_2-2}, \text{ 可得 } y'_0=\frac{2y_2}{x_2-2},$$

$$\text{因为 } y_0-y'_0=\frac{6y_1}{x_1+2}-\frac{2y_2}{x_2-2}=\frac{6y_1(m^2y_2-1)-2y_2(m^2y_1+3)}{(x_1+2)(x_2-2)}$$

$$=\frac{4my_1y_2-6(y_1+y_2)}{(x_1+2)(x_2-2)}=\frac{-12m}{m^2+4}-\frac{-12m}{m^2+4}=0,$$

因为 $y_0=y'_0$, 即 S_0 与 S'_0 重合, 所以当 m 变化时, 点 S 均在直线 $l: x=4$ 上, $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

因为 $A_2(2, 0), S(4, y)$, 所以要使 $|A_2S|=|ST|$, 只需 $x=4$ 为线段 A_2T 的垂直平分线, 根据对称性可得点 $T(6, 0)$.

故存在定点 $T(6, 0)$ 满足条件. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. 【解析】(1) 由 $f(x)=e^x+2ax-1$, 得 $f'(x)=e^x+2a$,

当 $a \geq 0$ 时, 因为 $f(-1)=\left(\frac{1}{e}-1\right)-2a < 0$, 不合题意;

当 $a < 0$ 时, 当 $x \in (-\infty, \ln(-2a))$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (\ln(-2a), +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 所以 $f(x)_{\min}=f(\ln(-2a))=-2a+2a\ln(-2a)-1$.

要 $f(x) \geq 0$, 只需 $f(x)_{\min}=-2a+2a\ln(-2a)-1 \geq 0$.

令 $g(x)=x-x\ln x-1$, 则 $g'(x)=-\ln x$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

所以 $g(x) \leq g(1)=0$, 则由 $g(-2a)=-2a+2a\ln(-2a)-1 \geq 0$ 得 $-2a=1$,

所以 $a=-\frac{1}{2}$, 故实数 a 取值的集合 $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) ① 由已知 $F(x)=e^x-ax^2+2ax-1$, $F'(x)=e^x-2ax+2a$,

因为函数 $F(x)$ 有两个不同的极值点 x_1, x_2 , 所以 $F'(x)=e^x-2ax+2a$ 有两个不同零点,

若 $a \leq 0$, 则 $F'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $F'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上至多一个零点, 与已知不合, 所以 $a > 0$.

$$\text{由 } e^x-2ax+2a=0, \text{ 得 } \frac{1}{2a}=\frac{x-1}{e^x}, \text{ 令 } \varphi(x)=\frac{x-1}{e^x}$$

所以 $\varphi'(x)=\frac{2-x}{e^x}$, 当 $x \in (-\infty, 2)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 单调递增;

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)$ 单调递减; 所以 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(2)=\frac{1}{e^2}$,

因为 $\varphi(1)=0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{e^x}=\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x}=0$, 所以 $0 < \frac{1}{2a} < \frac{1}{e^2}$, 所以 $a > \frac{e^2}{2}$,

故实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2}e^2, +\infty\right)$. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

②设 $x_1 < x_2$, 由①则 $1 < x_1 < 2 < x_2$,

因为 $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$, 所以 $e^{x_1} = 2ax_1 - 2a, e^{x_2} = 2ax_2 - 2a$, 则 $\frac{e^{x_2}}{e^{x_1}} = \frac{x_2 - 1}{x_1 - 1}$,

取对数得 $x_2 - x_1 = \ln(x_2 - 1) - \ln(x_1 - 1)$,

令 $x_1 - 1 = t_1, x_2 - 1 = t_2$, 则 $t_2 - t_1 = \ln t_2 - \ln t_1$, 即 $t_2 - \ln t_2 = t_1 - \ln t_1$ ($0 < t_1 < 1 < t_2$),

令 $u(t) = t - \ln t$, 则 $u(t_1) = u(t_2)$,

因为 $u'(t) = t - \frac{1}{t}$, 所以 $u(t) = t - \ln t$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

令 $v(t) = u(t) - u\left(\frac{1}{t}\right) = t - \frac{1}{t} - 2\ln t$, 则 $v'(t) = \frac{(t-1)^2}{t^2} \geq 0$, $v(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $v(1) = 0$, 所以当 $t \in (0, 1)$ 时, $v(t) < v(1) = 0$, 即 $u(t) < u\left(\frac{1}{t}\right)$,

因为 $t_2 > 1, 2 - t_1 > 1, u(t) = t - \ln t$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $t_2 < \frac{1}{t_1}$,

所以 $x_2 - 1 < \frac{1}{x_1 - 1}$, 即 $x_1 x_2 < x_1 + x_2$,

所以 $x_1 x_2 < x_1 + x_2 < \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{2} e^2} (x_1 + x_2) < \frac{2}{3} \sqrt{a} (x_1 + x_2)$,

故 $3x_1 x_2 < 2\sqrt{a} (x_1 + x_2)$ 成立. 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线