新疆维吾尔自治区 2023 年普通高考第三次适应性检测

文科数学参考答案

第 I 卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	A	D	D	C	B	C	A	C	D	C	A	D

第 II 卷

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $\frac{9}{10}$　　14. 2　　15. $\frac{35}{8}$　　16. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$

三、解答题:共 70 分,解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. 解:(1) 由 $\cos 2A+2\sin^2\frac{B+C}{2}=1$ 得 $\cos 2A+2\cos^2\frac{A}{2}=1$,所以 $2\cos^2A-1+1+\cos A=1$,

即 $2\cos^2A+\cos A-1=0$,所以 $(2\cos A-1)(\cos A+1)=0$,解得 $\cos A=\frac{1}{2}$ 或 $\cos A=-1$.

又 $A\in(0,\pi)$,可得 $A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………………… 6 分

(2) 由正弦定理得 $\frac{\sqrt{6}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin B}$,解得 $\sin B=1$.

因为 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{2}$.

又因为 $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{2}$,所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}=\sqrt{3}$. ……………… 12 分

18. (1) 证明:因为 $AP^2=PD^2+AD^2$,所以 $AD\perp PD$.

又 $AD\perp DC$,$PD\cap DC=D$,$PD,DC\subset$ 平面 PCD,

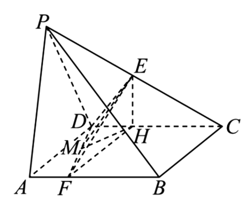
所以 $AD\perp$ 平面 PCD,又 $AD\subset$ 平面 PAD,所以平面 $PCD\perp$ 平面 PAD. ……… 6 分

(2) 解:如图,作 $EH\perp DC$ 于 H,$HM\perp DF$ 于 M,连接 EM,

因为 $AD\perp$ 平面 PCD,$EH\subset$ 平面 PCD,所以 $AD\perp EH$.

因为 $EH\perp DC$,$AD\cap DC=D$,$AD,DC\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $EH\perp$ 平面 $ABCD$;



因为 $DF\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $EH\perp DF$；

因为 $HM\perp DF$，$HM\cap EH=H$，HM，$EH\subset$ 平面 EHM，

所以 $DF\perp$ 平面 EHM，$EM\subset$ 平面 EHM，所以 $DF\perp EM$.

设棱锥 $C-DEF$ 的高为 h，

因为底面 $ABCD$ 是长方形，$2AD=CD=PD=2$，$PA=\sqrt{5}$，点 E 为线段 PC 的中点，且 $AF=\frac{1}{2}$.

所以 $DF=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$EH=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$HM=\frac{AD\times DH}{DF}=\frac{1\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$EM=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{20}}$

所以 $S_{\triangle EFD}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{19}}{8}$，

因为 $V_{三棱锥E-DFC}=V_{三棱锥C-DFE}$，即 $\frac{1}{3}\times EH\times S_{\triangle DFC}=\frac{1}{3}\times h\times S_{\triangle EFD}$，

得 $h=\frac{EH\times S_{DFC}}{S_{\triangle EFD}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\times1\times2}{\frac{\sqrt{19}}{8}}=\frac{4\sqrt{57}}{19}$，所以棱锥 $C-DEF$ 的高 $h=\frac{4\sqrt{57}}{19}$. ………12 分

19. 解：(1) 由题得 $300\times\frac{1050}{1500}=210$，所以应收集 210 位男生的样本数据. ………………… 3 分

(2) 由频率分布直方图得 $1-2\times(0.100+0.025)=0.75$，所以该校学生高考前平均每天睡眠时间超过 4 小时的概率估计值为 0.75. ……………………………………… 6 分

(3) 由(2)知，300 位学生中有 $300\times0.75=225$ 人高考前日均睡眠时间超过 4 小时，75 人的高考前日均睡眠时间不超过 4 小时，又因为样本数据中有 210 份是关于男生的，90 份是关于女生的，所以高考前一周每日平均睡眠时间与性别列联表如下：

	男生	女生	总计
高考前日均睡眠时间不超过 4 小时	45	30	75
高考前日均睡眠时间超过 4 小时	165	60	225
总计	210	90	300

结合列联表可算 $K^2=\frac{300\times(45\times60-165\times30)^2}{75\times225\times210\times90}\approx4.762<6.635$，

所以，没有 99%的把握认为“该校学生的考前一周睡眠时间与性别有关”. …12 分

20. 解：(1) 由题得$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{\frac{9}{4}}{b^2}=1\\ a^2-b^2=1\end{cases}$，得$\begin{cases}a^2=4\\ b^2=3\end{cases}$，

所以椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，…………………………………………………… 3 分

所以$|PF_1|+|PF_2|=2a=4$，又$|F_1F_2|=2$，

所以$\triangle PF_1F_2$ 的周长为 6. ……………………………………………………………… 5 分

(2) 设直线 AB 的方程为 $y=-\sqrt{2}x+m(m>0)$，

因为 AB 与圆 $x^2+y^2=3$ 相切，所以$\dfrac{|m|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$，所以 $m=3$. ………………………… 6 分

由$\begin{cases}y=-\sqrt{2}x+3\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $11x^2-24\sqrt{2}x+24=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{24\sqrt{2}}{11}$，$x_1x_2=\dfrac{24}{11}$，

所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+2}\sqrt{(\dfrac{24\sqrt{2}}{11})^2-4\times\dfrac{24}{11}}=\dfrac{12\sqrt{2}}{11}$. ……… 9 分

又$|AF_2|=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-1)^2+3(1-\dfrac{x_1^2}{4})}=\sqrt{\dfrac{1}{4}(x_1-4)^2}=\dfrac{1}{2}(4-x_1)$，

同理$|BF_2|=\dfrac{1}{2}(4-x_2)$，

所以$|AF_2|+|BF_2|=4-\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)=4-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{24\sqrt{2}}{11}=4-\dfrac{12\sqrt{2}}{11}$. ………………… 11 分

所以$\triangle AF_2B$ 的周长为$|AF_2|+|BF_2|+|AB|=4-\dfrac{12\sqrt{2}}{11}+\dfrac{12\sqrt{2}}{11}=4$. …………… 12 分

21. 解：(1) $f'(x)=a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax-1}{x}(x>0)$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $f(1)=0$

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)<f(1)=0$，不合题意，

②当 $a>0$ 时，若 $x\in(0,\dfrac{1}{a})$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$x\in(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(\frac{1}{a})$，

又 $f(\frac{1}{a})=1-a+\ln a=0$，易知 $a=1$ 时成立，下证 $a=1$ 为唯一解

令 $m(a)=1-a+\ln a$，$m'(a)=\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}(a>0)$，

当 $a\in(0,1)$，$m'(a)>0$，$m(a)$ 单调递增，

当 $a\in(1,+\infty)$，$m'(a)<0$，$m(a)$ 单调递减，

所以 $m(a)_{\max}=m(1)=0$，于是方程 $1-a+\ln a=0$ 有且仅有一解为 $a=1$. ……… 6 分

(2)①$g(x)=xf(x)=x^2-x-x\ln x$，故 $g'(x)=2x-\ln x-2$，

令 $h(x)=2x-\ln x-2$，所以 $h'(x)=\frac{2x-1}{x}(x>0)$，

当 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

当 $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；

又 $h(1)=0$，$h(\frac{1}{2})<0$，$h(\frac{1}{e^2})=\frac{2}{e^2}>0$，故 $\exists x_0\in(\frac{1}{e^2},\frac{1}{2})$ 使得 $h(x_0)=0$.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_0,1)$ 时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

故 $g(x)$ 的极小值点为 $x=1$.

②由①知 x_0 满足 $2x_0-\ln x_0-2=0$，即 $\ln x_0=2x_0-2$，

所以 $g(x_0)=x_0^2-x_0-x_0(2x_0-2)=-x_0^2+x_0=-(x_0-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}<\frac{1}{4}$.

又 $h(\frac{1}{e})=\frac{2-e}{e}<0$，

当 $x\in(x_0,\frac{1}{e})$ 时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，故 $g(x_0)>g(\frac{1}{e})=\frac{1}{e^2}$.

综上 $\frac{1}{e^2}<g(x_0)<\frac{1}{4}$. ………………………………………………………… 12 分

二选一试题

22. 解：(1) 由 $x=2-\frac{\sqrt{2}}{2}t$ 得 $\frac{\sqrt{2}}{2}t=2-x$，代入 $y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t$ 得 C_1 的普通方程为 $x+y-4=0$. …… 2 分

由 $\rho^2=\frac{4}{3\sin^2\theta+1}$ 得 $3\rho^2\sin^2\theta+\rho^2=4$，因为 $\rho^2=x^2+y^2$，$y=\rho\sin\theta$，

所以 C_2 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………………………………………… 5 分

(2) 设曲线 C_2：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的任意一点的坐标为 $(2\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in[0,2\pi)$， …… 6 分

则 M 到 C_1 的距离 $d=\frac{|2\cos\theta+\sin\theta-4|}{\sqrt{2}}=\frac{|\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)-4|}{\sqrt{2}}$， ………………………… 7 分

其中 $\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. …………………………………………… 8 分

当 $\sin(\theta+\varphi)=-1$ 时，M 到 C_1 的距离最大，此时 $\theta+\varphi=\frac{3\pi}{2}$，$\theta=\frac{3\pi}{2}-\varphi$，

$\cos\theta=\cos(\frac{3\pi}{2}-\varphi)=-\sin\varphi=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\theta=\sin(\frac{3\pi}{2}-\varphi)=-\cos\varphi=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

故所求 M 的坐标为 $\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$. ………………………………………………… 10 分

23. 解：(1) 由题意知 $f(x)=\begin{cases}-4x, x<-\frac{1}{4},\\ 1, -\frac{1}{4}\leqslant x<\frac{1}{4},\\ 4x, x\geqslant\frac{1}{4},\end{cases}$

令 $f(x)=4$，得 $x=-1$ 或 1.

又 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-\frac{1}{4})$ 上单调递减，在区间 $(\frac{1}{4},+\infty)$ 上单调递增，

故可知 $f(x)<4$ 的解集为 $\{x|-1<x<1\}$. …………………………………………………… 5 分

(2) 由(1)可知，$f(x)$ 的最小值 $M=1$，

则 $\frac{a+1}{2(a+2)}+\frac{b-1}{b+1}=1$，所以 $1-\frac{1}{a+2}+2-\frac{4}{b+1}=2$，即 $\frac{1}{a+2}+\frac{4}{b+1}=1$.

因为 $a>0$，$b>0$，所以令 $m=a+2>2$，$n=b+1>1$，则 $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=1$，

所以 $a+b=m+n-3=(m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{4}{n}\right)-3=\left(5+\frac{4m}{n}+\frac{n}{m}\right)-3\geqslant5+2\sqrt{\frac{4nm}{nm}}-3=(5+4)-3=6$，

当且仅当 $m=3$，$n=6$，即 $a=1$，$b=5$ 时等号成立. ………………………………… 10 分

以上解法仅供参考，如有其他方法，酌情给分。