# 数　学

## 参考答案、提示及评分细则

1.【答案】D

【解析】由 $z=7-\mathrm{i}$,可得复数 $z$ 在复平面内所对应的点所在的象限为第四象限.故选 D.

2.【答案】B

【解析】由 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 4\}$,$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 5\}$,可得 $A\cap B=[0,4]$,故选 B.

3.【答案】A

【解析】$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{4|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2}=\sqrt{16+12+9}=\sqrt{37}$.故选 A.

4.【答案】C

【解析】对于 A,由折线图的变化趋势可知,月跑步里程不是逐月增加的,故选项 A 错误;

对于 B,由折线图可知,月跑步里程的最小值出现在 2 月为 5,最大值出现在 10 月为 25,极差为 20,大于 18,故选项 B 错误;

对于 C,月跑步里程从小到大排列为:2 月,8 月,3 月,4 月,1 月,5 月,7 月,6 月,11 月,9 月,10 月,则 7 月对应的里程为 60%分位数,故 C 正确;

对于 D,由折线图的变化趋势可知,1 月至 5 月的月跑步里程相对于 6 月至 11 月波动性更小,所以 1 月至 5 月的月跑步里程相对于 6 月至 11 月的月跑步里程的方差更小,故选项 D 错误.故选 C.

5.【答案】B

【解析】由 $g(x)=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$,可知函数 $g(x)$ 是由函数 $f(x)=x^3+\sqrt{2}\sin x$ 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单得到,又由函数 $f(x)$ 为奇函数,可知函数 $g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 对称,又由直线 $y=2x-\frac{\pi}{2}$ 过点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$,由对称性可知这 3 个交点的横坐标之和为 $\frac{3\pi}{4}$.故选 B.

6.【答案】A

【解析】由图 2 得半球、圆柱底面和圆台一个底面的半径为 $R=\frac{19}{2}=9.5(\mathrm{m})$,而圆台一个底面的半径为 $r=1(\mathrm{m})$,圆台的母线长为 $l=\sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2+3.15^2}=\frac{\sqrt{4258}}{2}\approx 32.6$,则 $S_{半球}=\frac{1}{2}\times 4\times\pi\times 9.5^2=180.5\pi(\mathrm{m}^2)$,$S_{圆柱}=2\pi\times 9.5\times 14=266\pi(\mathrm{m}^2)$,$S_{圆台}=\pi\left(1+\frac{19}{2}\right)\times 32.6\approx 342.3\pi(\mathrm{m}^2)$,$S_{底}=\pi(\mathrm{m}^2)$,所以 $S_{表}=180.5\pi+266\pi+342.3\pi+\pi=789.8\pi\approx 789.8\times 3.14\approx 2480\ \mathrm{m}^2$.故选 A.

7.【答案】D

【解析】$\tan\alpha-\tan\beta=3\sqrt{3}$,且 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$,

则 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos\alpha\cos\beta}=3\sqrt{3}$,

整理得 $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{6}$,

则 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}$,

整理得 $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$,

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{6}$. 故选 D.

8.【答案】A

【解析】$c=1.1$,设 $f(x)=x-\ln(x+1)$(其中 $x\geqslant 0$),有 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}\geqslant 0$,可知函数 $f(x)$ 单调递增,可得 $f(0.1)>f(0)=0$,有 $0.1-\ln 1.1>0$,有 $1.2-\ln 1.1>1.1$,即 $b>c$. 令 $g(x)=e^{x}-2x+\ln(x+1)-1$(其中 $x\geqslant 0$),有 $g'(x)=e^{x}-2+\dfrac{1}{x+1}\geqslant x+1-2+\dfrac{1}{x+1}=\left[(x+1)+\dfrac{1}{x+1}\right]-2\geqslant 2\sqrt{(x+1)\times\dfrac{1}{x+1}}-2=0$(当且仅当 $x=0$ 时等号成立),可知函数 $g(x)$ 单调递增,有 $g(0.1)>g(0)$,有 $e^{0.1}-0.2+\ln 1.1-1>0$,有 $e^{0.1}>1.2-\ln 1.1$,即 $a>b$. 故有 $a>b>c$. 故选 A.

9.【答案】BC

【解析】对于 A 选项,由正弦定理有 $\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos A$,有 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$,有 $\tan A=\sqrt{3}$,可得 $A=\dfrac{\pi}{3}$,故 A 选项错误;

对于 B 选项,由正弦定理有 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin B}{\sin A}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,有 $\sqrt{3}b=\sqrt{2}a$,故 B 选项正确;

对于 C 选项,由余弦定理有 $b^{2}+c^{2}-bc=3$,有 $(b+c)^{2}-3bc=3$,代入 $b+c=3$,可得 $bc=2$,故 C 选项正确;

对于 D 选项,由余弦定理有 $b^{2}+c^{2}-bc=4\geqslant 2bc-bc=bc$(当且仅当 $b=c=2$ 时取等号),有 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc\leqslant\sqrt{3}$,故 D 选项错误. 故选 BC.

10.【答案】AC

【解析】依题意,由点 $F$ 的坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$,可得 $p=1$,$|PQ|=|QF|=|PF|$,$\triangle PQF$ 为等边三角形,$\therefore |PF|=|PQ|=4|OF|=2$,直线 $PF$ 的倾斜角为 $60^{\circ}$ 或 $120^{\circ}$,点 $P$ 的横坐标为 $2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$. 故选 AC.

11.【答案】ACD

【解析】由题意可得 $P(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$,$P(B)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$,

所以 $P(A)=1-P(B)$，故 A 正确；

因为事件 $A,B$ 可以同时发生，故两事件不是对立事件，故 B 错误；

因为事件 $A,B$ 互不影响，所以 $A,B$ 为相互独立事件，

则 $P(C)=P(AB)+P(\bar{A}\bar{B})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

因为事件 $B\cap C$ 表示第一次为偶数且第二次为偶数，所以 $P(BC)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

又 $P(B)P(C)=\frac{1}{4}=P(B)P(C)$，所以 $B$ 与 $C$ 相互独立，故 C 正确；

事件 $A\cup B$ 表示第一次或第二次为偶数，它的对立事件为第一次和第二次都是偶数，

所以 $P(A\cup B)=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$，故 D 正确. 故选 ACD.

12.【答案】ABD

【解析】选项 A，由 $ae^x>0$，可知曲线 $C_1$ 的图象在 $x$ 轴的上方，故 A 正确；

选项 B，当 $a=1$ 时，$C_1: y=e^x$，$C_2: y=\ln x$，对于 $C_2: y=\ln x$，有 $y'=\frac{1}{x}(x>0)$，

因为直线 $l: y=kx+b$ 为曲线 $C_2$ 的切线，所以 $\frac{1}{x}=k$，即 $x=\frac{1}{k}$，此时 $y=\ln\frac{1}{k}=-\ln k$，

所以切点坐标为 $\left(\frac{1}{k},-\ln k\right)$，将其代入切线方程 $y=kx+b$ 中，有 $-\ln k=1+b$，整理得 $ke^{b+1}=1$，可得 $\ln k+b=-1$，即 B 正确；

选项 C，当 $b=0$ 时，公切线 $l$ 为 $y=kx$，设 $f(x)=ae^x$，$g(x)=\ln\frac{x}{a}$，则 $f'(x)=ae^x$，$g'(x)=\frac{1}{x}(x>0)$，

所以 $f'(x_1)=ae^{x_1}=k=\frac{ae^{x_1}}{x_1}$，$g'(x_2)=\frac{1}{x_2}=k=\frac{\ln\frac{x_2}{a}}{x_2}$，解得 $x_1=x_2=1$，$a=\frac{1}{e}$，故 C 错误；

选项 D，当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x$，$g(x)=\ln x$，则 $f'(x)=e^x$，$g'(x)=\frac{1}{x}(x>0)$，

若 $C_1$ 和 $C_2$ 存在斜率为 $\frac{1}{k}$ 的公切线，则存在 $m$ 和 $n$ 使得 $f'(m)=e^m=\frac{1}{k}$，$g'(n)=\frac{1}{n}=\frac{1}{k}(n>0)$，

由选项 B 可知，$ke^{b+1}=1$，即 $e^{b+1}=\frac{1}{k}$，

所以 $e^{b+1}=e^m$，$e^{b+1}=\frac{1}{n}$，即 $m=b+1$，$n=\frac{1}{e^{b+1}}$，符合题意，

故当 $a=1$ 时，$C_1$ 和 $C_2$ 必存在斜率为 $\frac{1}{k}$ 的公切线，即 D 正确. 故选 ABD.

13.【答案】10

【解析】展开式通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r(x^2)^r\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{5-r}=C_5^r\cdot(-1)^{5-r}\cdot x^{\frac{5}{2}(r-1)}$，令 $\frac{5}{2}(r-1)=5$，得 $r=3$，

∴展开式中含 $x^5$ 的系数为 $C_5^3\cdot(-1)^2=10$.

14.【答案】$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 或 $(x-3)^2+(y+3)^2=9$ 或 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$ 或 $(x-9)^2+(y-9)^2=81$（写出其中一个即可）

【解析】圆 $C$ 的标准方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$，画图可知圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 和圆 $(x-3)^2+(y+3)^2=9$ 和圆 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$ 和 $(x-9)^2+(y-9)^2=81$ 都与坐标轴和圆 $C$ 相切.

15.【答案】$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$

【解析】$\because \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，$\therefore$ 点 $P$ 的轨迹是以 $AB$ 为直径的两段半圆弧. 取 $AB$ 中点 $O$，连接 $DO$，当 $DP$ 取最小值时，$P$ 为线段 $DO$ 与半圆弧的交点. 此时 $DP=OP-1=\sqrt{5}-1$，$\cos\angle AOP=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$AP^2=1+1-\frac{2\sqrt{5}}{5}=2-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\frac{DP^2}{AP^2}=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{2-\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

16.【答案】5

【解析】设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，点 $P$ 在双曲线 $E$ 的右支上，由 $|OP|=\frac{1}{2}|F_1F_2|$，可知 $PF_1\perp PF_2$，又由双曲线的定义有 $m-n=2a$，$m^2+n^2=4c^2$，在 $\mathrm{Rt}\triangle PF_1F_2$ 中，$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的半径 $r=\frac{1}{2}(m+n-2c)$，又由 $r=2a$，可得 $m+n=4a+2c$，联立 $\begin{cases}m+n=4a+2c,\\m-n=2a,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3a+c,\\n=a+c,\end{cases}$ 代入 $m^2+n^2=4c^2$，有 $(3a+c)^2+(a+c)^2=4c^2$，整理为 $5a^2+4ac-c^2=0$，可得 $(a+c)(5a-c)=0$，有 $c=5a$，故双曲线 $E$ 的离心率 $e=\frac{c}{a}=5$.

17.【答案】(1) $a_n=2^n$；$b_n=n$　(2) 略

【解析】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$，数列 $\{b_n\}$ 的公差为 $d$，由 $a_1=2b_1=2$，有 $a_1=2$，$b_1=1$，………… 1 分

又由 $a_2=2b_2$，有 $2q=2(d+1)$，有 $q=d+1$，………… 2 分

又由 $a_3=2b_3+2$，有 $2q^2=2(1+2d)+2$，有 $q^2=2d+2$，有 $q^2=2(d+1)$，………… 3 分

可得 $q^2=2q$，得 $q=2$ 或 $q=0$（舍去），故 $q=2$，$d=1$，………… 4 分

故 $a_n=2^n$，$b_n=n$；………… 5 分

(2) 证明：由 (1) 知：$c_n=\frac{b_n^2}{a_n}=\frac{n^2}{2^n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，………… 6 分

则 $c_{n+1}-c_n=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}-\frac{n^2}{2^n}=\frac{-n^2+2n+1}{2^{n+1}}$，………… 7 分

当 $n=1,2$ 时，$c_{n+1}-c_n>0$；当 $n\geqslant 3$ 时，$c_{n+1}-c_n<0$，即 $c_1<c_2<c_3>c_4>c_5>\cdots$，………… 8 分

又 $c_1=\frac{1}{2}$，$c_2=1$，$c_3=\frac{9}{8}$，$c_4=1$，$c_5=\frac{25}{32}$，………… 9 分

故 $T_1=T_2=\frac{1}{2}$，$T_3=T_4=\frac{9}{16}$，当 $n\geqslant 5$ 时，$c_n<1$，$T_{n+1}<T_n$. 故 $T_n\leqslant\frac{9}{16}$. ………… 10 分

18.【答案】(1)$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$　(2)$f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

【解析】(1)由函数 $f(x)$在区间$\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$上单调,且 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-f\left(\frac{\pi}{3}\right)$,可知 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=0$, ……… 3 分

故 $y=f(x)$的图象的一个对称中心的坐标为$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$; ……… 4 分

(2)由点 $P\left(-\frac{\pi}{12},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$在函数 $f(x)$的图象上,有 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

又由$-\frac{\pi}{6}<-\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{3}$,$f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}>f\left(\frac{\pi}{12}\right)=0$,

可知函数 $f(x)$在区间$\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$上单调递减, ……… 6 分

由函数 $f(x)$的图象和性质,有$\frac{\pi\omega}{12}+\varphi=2k_1\pi+\frac{\pi}{2}(k_1\in\mathbf{Z})$, ……… 7 分

又 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,有$-\frac{\pi\omega}{12}+\varphi=2k_2\pi+\frac{\pi}{6}(k_2\in\mathbf{Z})$, ……… 8 分

将上面两式相加,有 $2\varphi=2(k_1+k_2)\pi+\frac{2\pi}{3}(k_1\in\mathbf{Z},k_2\in\mathbf{Z})$,有 $\varphi=(k_1+k_2)\pi+\frac{\pi}{3}$,

又由 $0<\varphi<\pi$,可得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,有 $\omega=24k_1+2(k_1\in\mathbf{Z})$, ……… 10 分

又由函数 $f(x)$在区间$\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$上单调,有$\frac{2\pi}{\omega}\geqslant2\left[\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$,可得 $0<\omega\leqslant2$,可得 $\omega=2$,

故 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. ……… 12 分

19.【答案】(1)$\frac{2}{3}$　(2)分布列见解析,$D(Y)=\frac{8}{9}$　(3)32

【解析】(1)因为 $X\sim N(9,\sigma^2)$,所以 $P(X<7.4)=P(X>10.6)=\frac{1}{15}$, ……… 1 分

又因为 $P(10<X<10.6)=\frac{1}{10}$,所以 $P(X>10)=P(10<X<10.6)+P(X>10.6)=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6}$, … 3 分

所以 $P(8<X<10)=1-2P(X>10)=1-2\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$; ……… 4 分

(2)由 $Y\sim B\left(4,\frac{2}{3}\right)$, ……… 5 分

有 $P(Y=0)=C_4^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$;

$P(Y=1)=C_4^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$; ……… 6 分

$P(Y=2)=C_4^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{24}{81}=\frac{8}{27}$;

$P(Y=3)=C_4^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81}$; ……… 7 分

$P(Y=4)=C_4^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{16}{81}$.

故 $Y$ 的分布列为

| Y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{81}$ | $\frac{8}{81}$ | $\frac{8}{27}$ | $\frac{32}{81}$ | $\frac{16}{81}$ |

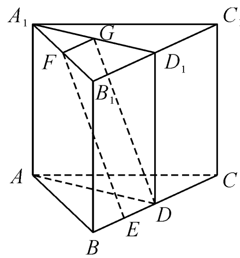
$D(Y)=4\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$；…………………………………………………… 9 分

(3)由二项分布可知 $\frac{2}{3}n\geqslant 21$，可得 $n\geqslant\frac{63}{2}$，又由 $n$ 为正整数，可得 $n\geqslant 32$，

故 $n$ 的最小值为 32. …………………………………………………… 12 分

20.【答案】(1)略 (2)$\frac{2}{5}$

【解析】(1)证明：取 $A_1D_1$ 的中点 $G$，连接 $FG$，$DG$，



依题意 $FG/\!/B_1D_1$，且 $FG=\frac{1}{2}B_1D_1$，$DE=\frac{1}{2}BD$，

由三棱柱的性质知 $BD/\!/B_1D_1$， ………………………………… 2 分

所以四边形 $DGFE$ 是平行四边形，

所以 $EF/\!/DG$， ………………………………………………… 3 分

$\because B_1C_1\perp A_1D_1$，$B_1C_1\perp DD_1$，$A_1D_1\cap DD_1=D_1$，$A_1D_1$，$DD_1\subset$平面 $A_1DD_1$，

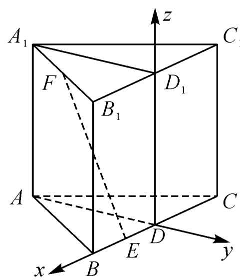
$\therefore B_1C_1\perp$平面 $A_1D_1D$，…………………………………………………… 4 分

$\because GD\subset$平面 $A_1D_1D$，$\therefore B_1C_1\perp DG$，

$\because EF/\!/DG$，$\therefore EF\perp B_1C_1$；…………………………………………………… 6 分

(2)因为$\triangle ABC$ 是等边三角形，且边长为 2，所以 $AD\perp BC$，

因为三棱柱的高为 1，以 $D$ 为坐标原点，$\overrightarrow{DB}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 $x$ 轴，$y$ 轴、$z$ 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



所以 $E\left(\frac{1}{2},0,0\right)$，$F\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$，$B(1,0,0)$，$C_1(-1,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$，$\overrightarrow{EF}=\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$，$\overrightarrow{EC_1}=\left(-\frac{3}{2},0,1\right)$， …………… 7 分

设平面 $BEF$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}=(x_1,y_1,z_1)\cdot\left(-\frac{1}{2},0,0\right)=-\frac{1}{2}x_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=(x_1,y_1,z_1)\cdot\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}y_1+z_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=\sqrt{3}$，则 $z_1=\frac{3}{2}$，$x_1=0$，所以 $\boldsymbol{m}=\left(0,\sqrt{3},\frac{3}{2}\right)$，

设平面 $C_1EF$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

$$则\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC_1}=(x_2,y_2,z_2)\cdot\left(-\frac{3}{2},0,1\right)=-\frac{3}{2}x_2+z_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=(x_2,y_2,z_2)\cdot\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}y_2+z_2=0,\end{cases}$$

令 $y_2=2$，则 $x_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$z_2=\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},2,\sqrt{3}\right)$， …………………………………………… 10 分

设二面角 $B-EF-C_1$ 为 $\theta$，

所以 $|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|\left(0,\sqrt{3},\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},2,\sqrt{3}\right)\right|}{\sqrt{3+\frac{9}{4}}\cdot\sqrt{\frac{12}{9}+4+3}}=\frac{\frac{7\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{21}}{2}\times\frac{5\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{7\sqrt{3}}{2}}{\frac{5\sqrt{7}}{2}}=\frac{\sqrt{21}}{5}$，

则 $\sin\theta=\frac{2}{5}$，所以二面角 $B-EF-C_1$ 的正弦值为 $\frac{2}{5}$． …………………………………………… 12 分

21.【答案】(1)极小值为 $1+\ln 2$，没有极大值　(2)$[1,+\infty)$

【解析】(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$，$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-2}{x^2}$， ……………………………… 1 分

令 $f'(x)>0$，可得 $x>2$， ………………………………………………………………… 2 分

故当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(2,+\infty)$，递减区间为 $(0,2)$， …………………… 3 分

可得函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(2)=1+\ln 2$，没有极大值； ……………………………………… 4 分

(2)由 $\sqrt{ax}\geqslant f(x)$ 恒成立，取 $x=1$，有 $\sqrt{a}\geqslant\frac{2}{1+a}+\ln 1$，有 $\sqrt{a}(1+a)\geqslant 2$，

又由函数 $g(a)=\sqrt{a}(1+a)$ 单调递增，且 $g(1)=2$，可得 $a\geqslant 1$， …………………………… 6 分

下面证明当 $a\geqslant 1$ 时，$\sqrt{ax}\geqslant f(x)$ 恒成立，

由 $\sqrt{ax}\geqslant f(x)$ 可化为 $\sqrt{ax}-\frac{2}{x+a}-\ln x\geqslant 0$，

又由 $\sqrt{ax}\geqslant\sqrt{x}$，$\frac{2}{x+a}\leqslant\frac{2}{x+1}$，有 $\sqrt{ax}-\frac{2}{x+a}\geqslant\sqrt{x}-\frac{2}{x+1}$，

故只需证明：不等式 $\sqrt{x}-\frac{2}{x+1}-\ln x\geqslant 0$ 恒成立， ……………………………………… 8 分

令 $t=\sqrt{x}$，有 $x=t^2$，上述不等式等价于 $t-\frac{2}{t^2+1}-2\ln t\geqslant 0$， ………………………… 9 分

令 $h(t)=t-\frac{2}{t^2+1}-2\ln t$，有 $h'(t)=1+\frac{4t}{(t^2+1)^2}-\frac{2}{t}=\left(1-\frac{1}{t}\right)+\left[\frac{4t}{(t^2+1)^2}-\frac{1}{t}\right]=\frac{t-1}{t}+\frac{4t^2-(t^2+1)^2}{t(t^2+1)^2}=\frac{t-1}{t}-\frac{(t^2-1)^2}{t(t^2+1)^2}=\frac{t-1}{t}\left[1-\frac{(t-1)(t+1)^2}{(t^2+1)^2}\right]=\frac{(t-1)(t^4-t^3+t^2+t+2)}{t(t^2+1)^2}$，

又由 $t^4+t^2\geqslant 2\sqrt{t^4\times t^2}=2t^3$（当且仅当 $t=1$ 时取等号），

有 $t^4-t^3+t^2+t+2\geqslant t^3+t+2>0$，令 $h'(t)>0$，可得 $t>1$， …………………………… 11 分

可得函数 $h(t)$ 的单调递增区间为 $(1,+\infty)$，递减区间为 $(0,1)$，

有 $h(t)\geqslant h(1)=0$，可得不等式 $\sqrt{x}-\frac{2}{x+1}-\ln x\geqslant 0$ 成立，

若 $\sqrt{ax}\geqslant f(x)$ 恒成立，则 $a$ 的取值范围为 $[1,+\infty)$. …………………………………………………… 12 分

22.【答案】(1) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ (2) $(1,\sqrt{2})$

【解析】(1)由题可知椭圆 $C_2$ 过点 $(1,0)$，所以椭圆 $C_1$ 的焦点坐标为 $(1,0)$，$a^2-2=1$，所以 $a^2=3$，…… 2 分

即椭圆 $C_1$ 的标准方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$；…………………………………………………………………… 3 分

(2)易知直线 $l$ 的斜率存在，设 $l:y=kx+t(k\neq 0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，

令直线 $l$ 与椭圆 $C_1$ 联立，$\begin{cases}\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=kx+t,\end{cases}$ 消去 $y$，整理得 $(3k^2+2)x^2+6ktx+3t^2-6=0$，

$\Delta=(6kt)^2-4(3t^2-6)(3k^2+2)=48-24t^2+72k^2>0$，

令直线 $l$ 与椭圆 $C_2$ 联立，$\begin{cases}x^2+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=kx+t,\end{cases}$ 消去 $y$，整理得 $(k^2+2)x^2+2ktx+t^2-2=0$，

$\Delta=4k^2t^2-4(t^2-2)(k^2+2)=16-8t^2+8k^2>0$，

则 $x_1+x_2=\frac{-6kt}{3k^2+2}$，$x_1x_2=\frac{3t^2-6}{3k^2+2}$，$x_3+x_4=\frac{-2kt}{k^2+2}$，$x_3x_4=\frac{t^2-2}{k^2+2}$，………………………………………… 5 分

所以 $|AB|=|x_1-x_2|\cdot\sqrt{k^2+1}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\cdot\sqrt{k^2+1}=\frac{2\sqrt{6}\times\sqrt{3k^2-t^2+2}}{3k^2+2}\cdot\sqrt{k^2+1}$，

$|CD|=|x_3-x_4|\cdot\sqrt{k^2+1}=\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4}\cdot\sqrt{k^2+1}=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{k^2-t^2+2}}{k^2+2}\cdot\sqrt{k^2+1}$，…… 7 分

因为 $|AB|=\sqrt{3}|CD|$，所以 $\frac{2\sqrt{6}\times\sqrt{3k^2-t^2+2}}{3k^2+2}\cdot\sqrt{k^2+1}=\frac{2\sqrt{6}\times\sqrt{k^2-t^2+2}}{k^2+2}\cdot\sqrt{k^2+1}$，

即 $\frac{\sqrt{3k^2-t^2+2}}{3k^2+2}=\frac{\sqrt{k^2-t^2+2}}{k^2+2}$，平方整理得 $t^2=\frac{3}{4}(k^2+1)-\frac{1}{4(k^2+1)}+\frac{1}{2}$，………………………… 9 分

因为 $k\neq 0$，所以 $k^2+1>1$，所以 $t^2=\frac{3}{4}(k^2+1)-\frac{1}{4(k^2+1)}+\frac{1}{2}>1$，……………………………… 11 分

即 $t$ 的取值范围为 $(1,\sqrt{2})$. ……………………………………………………………………………………… 12 分