

天津市南仓中学2022至2023学年度第一学期
高三年级数学期末试卷答案

1. D 2. A 3. C 4. B 5. B 6. C 7. D 8. C 9. D
10. $\frac{3}{2}$ 11. 60 12. 5 13. $\frac{11}{14}$ 3 14. 11 15. $\frac{1}{2}$ $\frac{59}{112}$

16. (1) $\because \sin A = \sqrt{3} \sin C, \therefore$ 由正弦定理得 $a = \sqrt{3}c$, 又 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$

$$\therefore \frac{1}{2}ac \sin 150^\circ = \sqrt{3}, \text{ 解得 } c = 2, \therefore a = 2\sqrt{3};$$

(2) 由余弦定理有 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos 150^\circ, \therefore b = 2\sqrt{7}$.

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin A = \frac{2\sqrt{3} \sin 150^\circ}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14}.$$

(3) $\because B = 150^\circ, \therefore A < 90^\circ, \therefore$ 由 $\sin A = \frac{\sqrt{21}}{14}$ 得, $\cos A = \frac{5\sqrt{7}}{14}$.

$$\therefore \sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{5\sqrt{3}}{14}, \cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = \frac{11}{14}.$$

$$\therefore \sin \left(2A + \frac{\pi}{6} \right) = \sin 2A \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2A \sin \frac{\pi}{6} = \frac{13}{14}.$$

17. (1) 证明: 取 CP 中点 F , 连接 NF, BF ,

因为 F, N 分别为 PC, PD 的中点, 则 $NF \parallel DC$, 且 $NF = \frac{1}{2}DC$,

又 $AB \parallel CD$, 且 $CD = 2, AB = 1 = \frac{1}{2}DC$, 所以四边形 $NABF$ 是平行四边形,

$\therefore AN \parallel BF$, 又 $AN \notin$ 面 $PBC, BF \subset$ 面 PBC 所以 $AN \parallel$ 平面 PBC ;

(2) 取 CP 中点 E , 连接 AE , 则 $AB \parallel CE$, 且 $AB = CE$, 所以四边形 $ABCE$ 是平行四边形, 又 $AB \perp BC$, 则四边形 $ABCE$ 是矩形, 所以 AE, AB, AP 两两垂直, 建系如图.

$$\therefore A(0, 0, 0), D(2\sqrt{2}, -1, 0), C(2\sqrt{2}, 1, 0), B(0, 1, 0), P(0, 0, 1),$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = (0, 0, 1), \overrightarrow{AD} = (2\sqrt{2}, -1, 0), \overrightarrow{BC} = (2\sqrt{2}, 0, 0), \overrightarrow{BP} = (0, -1, 1), \text{ 设平面 } PAD$$

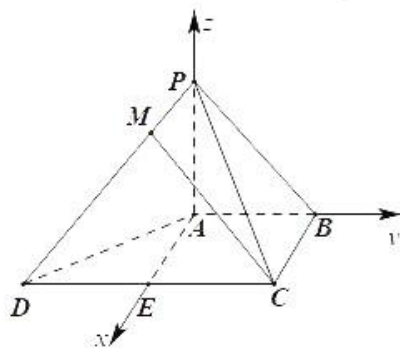
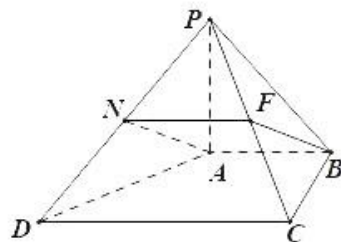
的法向量为 $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$, 平面 PBC 的法向量为 $\vec{m} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\text{则 } \begin{cases} z_1 = 0 \\ 2\sqrt{2}x_1 - y_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} 2\sqrt{2}x_2 = 0 \\ -y_2 + z_2 = 0 \end{cases}, \text{ 设 } x_1 = 1, y_1 = 2\sqrt{2} \text{ 得平面 } PAD \text{ 的一个法向量为 } \vec{n} = (1, 2\sqrt{2}, 0),$$

平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{m} = (0, 1, 1)$, 所以平面 PAD 与平面 PBC 所成二面角的余弦值为 $\frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2\sqrt{2}}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{3}$.

$$(3) \overrightarrow{DM} = \frac{1}{4} \overrightarrow{DP} = \frac{1}{4}(-2\sqrt{2}, 1, 1)$$

$$M\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \overrightarrow{CM} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{7}{4}, \frac{1}{4}\right)$$



由(2)知 $\vec{m}=(0,1,1)$ 是平面 PBC 的法向量,

$$\cos\langle\vec{CM},\vec{m}\rangle=\frac{\vec{CM}\cdot\vec{m}}{|\vec{CM}||\vec{m}|}=\frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{58}}{4}}=-\frac{3\sqrt{29}}{29}$$

所以直线 CM 与平面 PBC 所成角的正弦值是 $\frac{3\sqrt{29}}{29}$

18. (1) 由题意, $2a_4=2a_3+4a_6$, 设公比为 q , 则有 $a_4=a_3q+2a_3q^2$ 解得 $q=\frac{1}{2}$ 或 $q=-1$ (由于 a_n 是正数列,

舍), 由 $a_4=4a_3^2$, $a_3q=4a_3^2$, $a_3=\frac{q}{4}=\frac{1}{8}$, $a_1=\frac{a_3}{q^2}=\frac{1}{2}$, $\therefore a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$; 对于 $b_2+b_4=6$, 由等差中项可知

$b_3=\frac{b_2+b_4}{2}=3$, 设公差为 d , $S_4=b_1+b_2+b_3+b_4=b_3-2d+3b_3=10$, $\therefore d=1$, $b_1=b_3-2d=1$, $\therefore b_n=n$;

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 P_n , 则有:

$$P_{2n}=c_1+c_2+c_3+c_4+\cdots+c_{2n-1}+c_{2n}=(b_1+b_3+\cdots+b_{2n-1})+(a_2b_2+a_4b_4+\cdots+a_{2n}b_{2n})$$

$$=\frac{1+2n-1}{2}\cdot n+(2\times 2^{-2}+4\times 2^{-4}+6\times 2^{-6}+\cdots+2n\cdot 2^{-2n}) \quad \text{设 } K=2\times 2^{-2}+4\times 2^{-4}+6\times 2^{-6}+\cdots+2n\cdot 2^{-2n} \quad \text{...①},$$

$$2^{-2}\cdot K=2\times 2^{-4}+4\times 2^{-6}+6\times 2^{-8}+\cdots+2n\cdot 2^{-2n-2} \quad \text{...②}, \quad \text{②}-①\text{得: } \frac{3}{4}K=2\times 2^{-2}+2\times 2^{-4}+2\times 2^{-6}+\cdots+2\times 2^{-2n}-2n\cdot 2^{-2n-2},$$

$$K=\frac{8}{9}\left(\frac{2n}{3}+\frac{8}{9}\right)\cdot 4^{-n}, \quad P_{2n}=n^2+\frac{8}{9}\left(\frac{2n}{3}+\frac{8}{9}\right)\cdot 4^{-n};$$

$$(3) \quad d_n=\frac{2n+5}{(2n+1)(2n+3)}\cdot \frac{1}{2^n}=\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{n+1}}-\frac{1}{(2n+3)\cdot 2^n},$$

$$T_n=d_1+d_2+\cdots+d_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{5\times 2}+\frac{1}{5\times 2}-\frac{1}{7\times 2^2}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{n+1}}-\frac{1}{(2n+3)\cdot 2^n}=\frac{1}{3}-\frac{1}{(2n+3)\cdot 2^n}<\frac{1}{3}.$$

19. (1) 由点 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 和 F_1 关于点 $C\left(0, \frac{3}{4}\right)$ 对称, 得 $F_1(-1, 0)$, 所以椭圆 E 的焦点为 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$,

由椭圆定义, 得 $2a=|PF_1|+|PF_2|=4$, 所以 $a=2$, $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$, 故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 由题可知直线 l , 直线 PQ 的斜率存在, 设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$,

直线 PQ 的方程为 $y-\frac{3}{2}=k(x-1)$.

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \\ y=k(x-1), \end{cases}$ 消去 y , 得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$,

由题意, 可知 $\Delta>0$, 则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$, $x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$,

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y - \frac{3}{2} = k(x-1), \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 得 } (3+4k^2)x^2 - (8k^2-12k)x + 4k^2-12k-3=0,$$

$$\text{由 } \Delta > 0, \text{ 可知 } k \neq -\frac{1}{2}, \text{ 设 } Q(x_3, y_3), \text{ 又 } P\left(1, \frac{3}{2}\right), \text{ 则 } x_3+1 = \frac{8k^2-12k}{3+4k^2}, \quad x_3 \cdot 1 = \frac{4k^2-12k-3}{3+4k^2}.$$

$$\text{因为四边形 } PABQ \text{ 为平行四边形, 所以 } \frac{x_1+x_3}{2} = \frac{x_2+1}{2}, \text{ 即 } x_1-x_2=1-x_3, \text{ 故 } (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(1-x_3)^2.$$

$$\text{所以 } \left(\frac{8k^2}{3+4k^2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{4k^2-12}{3+4k^2} = \left(1 - \frac{4k^2-12k-3}{3+4k^2}\right)^2. \text{ 得 } k = \frac{3}{4}. \text{ 所以 } l \text{ 为 } 3x-4y-3=0.$$

$$20. (1) \text{ 当 } a=2 \text{ 时, 有 } f(x) = x^2 - 2x + 2\ln x, \therefore f'(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - x + 1)}{x}, \therefore f'(1) = 2, f(1) = -1,$$

$$\therefore \text{过点 } (1, f(1)) \text{ 的切线方程为 } y+1 = 2(x-1), \text{ 即 } 2x-y-3=0.$$

$$(2) \text{ 当 } a=1 \text{ 时, 有 } f(x) = x^2 - 2x + \ln x, \text{ 其定义域为 } \{x | x > 0\},$$

$$\text{从而方程 } f(x) = x+b, \text{ 可化为 } b = x^2 - 3x + \ln x, \text{ 令 } g(x) = x^2 - 3x + \ln x, \text{ 则 } g'(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x},$$

$$\text{由 } g'(x) > 0 \Rightarrow x > 1 \text{ 或 } 0 < x < \frac{1}{2}, g'(x) < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 1, \therefore g(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ 和 } (1, +\infty) \text{ 上单调递增, 在 } \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ 上单调递减,}$$

$$\text{且 } g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4} - \ln 2, g(1) = -2, \text{ 又当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } g(x) \rightarrow -\infty; \text{ 当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } g(x) \rightarrow +\infty,$$

$$\therefore \text{关于 } x \text{ 的方程 } b = x^2 - 3x + \ln x \text{ 有唯一实数解, 所以实数 } b \text{ 的取值范围是 } b < -2 \text{ 或 } b > -\frac{5}{4} - \ln 2.$$

$$(3) \because f(x) \text{ 的定义域为 } \{x | x > 0\}, f'(x) = 2x - 2 + \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - 2x + a}{x},$$

$$\text{令 } f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x + a = 0, \text{ 又因为函数 } f(x) \text{ 有两个极值点 } x_1, x_2 (x_1 < x_2),$$

$$\therefore 2x^2 - 2x + a = 0 \text{ 有两个不等实数根 } x_1, x_2 (x_1 < x_2), \therefore \Delta > 0 \Rightarrow 0 < a < \frac{1}{2}, \text{ 且 } x_1 + x_2 = 1, a = 2x_1 - 2x_1^2,$$

$$\text{从而 } 0 < x_1 < \frac{1}{2} < x_2 < 1, \text{ 由不等式 } f(x_1) \geq mx_2 \text{ 恒成立} \Rightarrow m \leq \frac{f(x_1)}{x_2} = \frac{x_1^2 - 2x_1 + a \ln x_1}{x_2} \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore \frac{f(x_1)}{x_2} = \frac{x_1^2 - 2x_1 + (2x_1 - 2x_1^2) \ln x_1}{x_2} = (1-x_1) - \frac{1}{1-x_1} + 2x_1 \ln x_1,$$

$$\text{令 } h(t) = 1-t - \frac{1}{1-t} + 2t \ln t \quad \left(0 < t < \frac{1}{2}\right), \therefore h'(t) = 1 - \frac{1}{(1-t)^2} + 2 \ln t < 0,$$

$$\text{当 } 0 < t < \frac{1}{2} \text{ 时恒成立, 所以函数 } h(t) \text{ 在 } \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ 上单调递减, } \therefore h(t) > h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \ln 2, \text{ 故实数 } m \text{ 的取值范围是}$$

$$m \leq -\frac{3}{2} - \ln 2.$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线