2022—2023 学年第一学期高三质量检测

数学试题参考答案

2023.01

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1-4. ACCD　　5-8. BBDD

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. BD　　10. ACD　　11. BC　　12. ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $[0,+\infty)$　　14. 3　　15. 2　　16. $\dfrac{12\sqrt{5}}{5}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (1) 解：由题意知 $C_n^1=C_n^7$，结合组合数的性质得 $n=8$. ………… 2 分

所以 $(x-2)^8$ 的展开式中二项式系数最大的项为第 5 项， ………… 3 分

且 $T_5=C_8^4x^4(-2)^4=1120x^4$. ………… 5 分

(2) 由（1），知 $(1-\dfrac{1}{x})(x-2)^8=(x-2)^8-\dfrac{(x-2)^8}{x}$. ………… 6 分

因为 $(x-2)^8$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_8^kx^{8-k}(-2)^k$，

所以 $(x-2)^8$ 展开式中的常数项为 $T_9=(-2)^8=256$， ………… 7 分

$\dfrac{(x-2)^8}{x}$ 的常数项为 $\dfrac{C_8^7\times(-2)^7x}{x}=-1024$. ………… 8 分

所以 $(1-\dfrac{1}{x})(x-2)^8$ 展开式中的常数项为 $256-(-1024)=1280$. ………… 10 分

18. （1）解：当 $n\geq2$ 时， $S_n=2a_n-1$①， $S_{n-1}=2a_{n-1}-1$② ………… 2 分

①-②得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$， 即 $a_n=2a_{n-1}$. ………… 4 分

当 $n=1$ 时，有 $a_1=2a_1-1$，解得 $a_1=1$．……………………………………5 分

所以 $\{a_n\}$ 是以1为首项，2为公比的等比数列，所以 $a_n=2^{n-1}$．……………6 分

（2）$b_n=\dfrac{a_n}{(a_{n+1}-1)\cdot(a_{n+2}-1)}=\dfrac{2^{n-1}}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1})$．……9 分

所以 $T_n=\dfrac{1}{2}[(\dfrac{1}{2^1-1}-\dfrac{1}{2^2-1})+(\dfrac{1}{2^2-1}-\dfrac{1}{2^3-1})+\cdots+(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1})]$

$=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1})$．……………………………………12 分

19. (1) 解：由余弦定理，得 $b^2=(a+c)^2-2ac-2ac\cos B$．

因为 $b=4\sqrt{3},a+c=8$，所以 $(4\sqrt{3})^2=8^2-2ac-2ac\cos B$．……………2 分

所以 $\cos B=\dfrac{8}{ac}-1\geqslant\dfrac{8}{\frac{(a+c)^2}{4}}-1=-\dfrac{1}{2}$，当且仅当 $a=c=4$ 时取等号……………4 分

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $0<B\leqslant\dfrac{2\pi}{3}$．……………………………………6 分

（2）由(1) 知 $ac=\dfrac{8}{1+\cos B}$．……………………………………7 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{4\sin B}{1+\cos B}=\dfrac{8\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{2\cos^2\frac{B}{2}}=4\tan\dfrac{B}{2}$．……………9 分

因为 $B\in(0,\dfrac{2\pi}{3}]$，所以 $\dfrac{B}{2}\in(0,\dfrac{\pi}{3}]$．而 $y=\tan x$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{3}]$ 上单调递增，

所以 $0<S_{\triangle ABC}\leqslant 4\tan\dfrac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$，所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $4\sqrt{3}$．……………12 分

20. （1）证明：如图，取 AE 的中点 F，连接 CF．

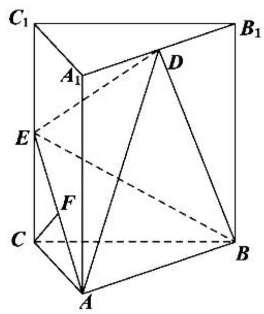
由 $AC=CE$，得 $CF\perp AE$．……………………………………1 分

因为 $CF\perp AE$，平面 $ABE\perp$ 平面 AA_1C_1C，平面 $ABE\cap$ 平面 $AA_1C_1C=AE$，

$CF\subset$ 平面 AA_1C_1C，

所以 $CF\perp$ 平面 ABE，所以 $CF\perp AB$．………3 分

由题意 $CC_1\perp$ 平面 ABC，所以 $CC_1\perp AB$．



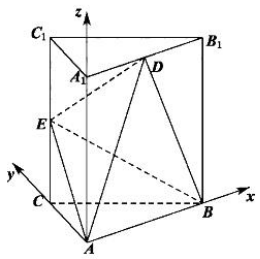
又 $CC_1 \subset$ 平面 AA_1C_1C，$CC_1 \cap CF = C$，

所以 $AB \perp$ 平面 AA_1C_1C．又 $AE \subset$ 平面 AA_1C_1C，所以 $AB \perp AE$． …………4 分

（2）由（1）知 $AB \perp AC$．

如图，以 A 为坐标原点，以 AB，AC，AA_1 所在的直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$．设 $AB=2m$，则 $B(2m,0,0)$，$C(0,1,0)$，$E(0,1,1)$，$D(m,0,2)$．

……………………………………………………………………………………………………6 分



因为三棱锥 $E-ABD$ 的外接球的表面积为 $\dfrac{13\pi}{2}$，

所以 $4\pi R^2=\dfrac{13\pi}{2}$，解得 $R=\sqrt{\dfrac{13}{8}}$． ……………7 分

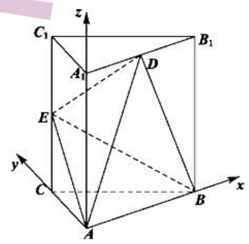
设三棱锥 $E-ABD$ 的外接球的球心为 $O(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}|OA|=|OB|,\\|OA|=|OD|,\\|OA|=|OE|,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x-2m)^2+y^2+z^2},\\\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x-m)^2+y^2+(z-2)^2},\\\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2+(z-1)^2}.\end{cases}$

解得 $x=m,y=\dfrac{m^2}{4},z=\dfrac{4-m^2}{4}$．所以球心 $O(m,\dfrac{m^2}{4},\dfrac{4-m^2}{4})$．

因为 $|OA|=R$，即 $m^2+\left(\dfrac{m^2}{4}\right)^2+\left(\dfrac{4-m^2}{4}\right)^2=\dfrac{13}{8}$．

解得 $m^2=1$，即 $m=1$． ………………………………………………………………9 分



所以 $B(2,0,0)$，$D(1,0,2)$．又 $E(0,1,1)$，

所以 $\overrightarrow{DE}=(-1,1,-1)$，$\overrightarrow{AE}=(0,1,1)$，$\overrightarrow{BE}=(-2,1,1)$．

设平面 ADE 的法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=-x_1+y_1-z_1=0,\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=y_1+z_1=0.\end{cases}$ 令 $z_1=-1$，则 $\vec{n}=(2,1,-1)$． ……………………10 分

设平面 BDE 的法向量为 $\vec{s}=(a,b,c)$，

则$\begin{cases} \vec{s}\cdot\overrightarrow{DE}=-a+b-c=0 \\ \vec{s}\cdot\overrightarrow{BE}=-2a+b+c=0 \end{cases}$令$c=1,b=3$，则$\vec{s}=(2,3,1)$． ……………………… 11 分

所以平面 ADE 与平面 BDE 夹角的余弦值为$\left|\cos\left\langle \vec{s},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{s}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{s}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|4+3-1\right|}{\sqrt{14}\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

……………………………………………………………………………… 12 分

21．(1) 由题意，$f'(x)=\mathrm{e}^x-2ax-1$．

令$g(x)=\mathrm{e}^x-2ax-1$，当$a=\dfrac{1}{2}$时，$g(x)=\mathrm{e}^x-x-1$． …………………… 1 分

则$g'(x)=\mathrm{e}^x-1$．

当$x\in(-\infty,0)$，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；

当$x\in(0,+\infty)$，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增．

所以$g(x)\geqslant g(0)=0$，即$f'(x)\geqslant 0$，当且仅当$x=0$时取等号． ……………… 2 分

所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增．

又$f(0)=1$，由$f(\sqrt{x-1}-1)<1=f(0)$，可得$\sqrt{x-1}-1<0$． …………… 4 分

解得$1\leqslant x<2$．故不等式$f(\sqrt{x-1}-1)<1$的解集为$[1,2)$． …………… 6 分

(2) 当$a>\dfrac{1}{2}$时，由（1），令$g'(x)=\mathrm{e}^x-2a=0$，可得$x=\ln 2a>0$.

当$0<x<\ln 2a$时，$g'(x)<0$，$g(x)=f'(x)$单调递减；

当$x>\ln 2a$时，$g'(x)>0$，$g(x)=f'(x)$单调递增.

又$f'(0)=0$，所以$f'(x)_{\min}=f'(\ln 2a)=2a-2a\ln 2a-1<0$． …………… 8 分

下证$\mathrm{e}^x>x^2$在$(0,+\infty)$上恒成立，

令$h(x)=\mathrm{e}^x-x^2$，则$h'(x)=\mathrm{e}^x-2x$，令$m(x)=\mathrm{e}^x-2x$，则$m'(x)=\mathrm{e}^x-2$，

所以当$0<x<\ln 2$时，$m'(x)<0$，$m(x)$为减函数，

当 $x>\ln 2$ 时，$m'(x)>0$，$m(x)$ 为增函数，

故 $m(x)>m(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2(1-\ln 2)>0$，即 $h'(x)>0$，

因此 $h(x)=e^x-x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，所以 $h(x)>h(0)=1>0$，

即 $e^x>x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以当 $x\in(\ln 2a,+\infty)$ 时，$f'(x)=e^x-2ax-1>x^2-2ax-1=(x-a)^2-(1+a^2)$

取 $x=2a+1$，则 $f'(2a+1)>(2a+1-a)^2-(1+a^2)=2a>0$

所以 $\exists x_0\in(\ln 2a,2a+1)$，使得 $f'(x_0)=e^{x_0}-2ax_0-1=0$，即 $a=\dfrac{e^{x_0}-1}{2x_0}$.

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增．故 x_0 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的极（小）值点．……………………………10 分

$f(x)$ 存在极小值 $f(x_0)=e^{x_0}-ax_0^2-x_0=\dfrac{1}{2}[(2-x_0)e^{x_0}-x_0]$.

而 $f(x_0)<\dfrac{3-x_0}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}[(2-x_0)e^{x_0}-x_0]<\dfrac{3-x_0}{2}\Leftrightarrow(x_0-2)e^{x_0}+3>0$.

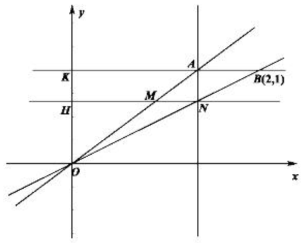
令 $\varphi(x)=(x-2)e^x+3\ (x>0)$，则 $\varphi'(x)=(x-1)e^x$.

当 $0<x<1$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减；当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，

所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi(1)=3-e>0$.

因为 $x_0>0$，所以 $\varphi(x_0)=(x_0-2)e^{x_0}+3>0$，所以 $f(x_0)<\dfrac{3-x_0}{2}$. …………12 分

22.（1）由题意，设 $M(x_0,y_0)$，$N(a,y_0)(a\neq 0)$，则 $A(a,1)$.



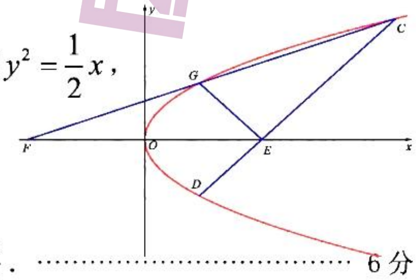
因为 $N(a,y_0)$ 在直线 l_{OB}：$y=\dfrac{1}{2}x$ 上，所以 $y_0=\dfrac{1}{2}a$ ①

因为 $M(x_0,y_0)$ 在直线 l_{OA}：$y=\dfrac{1}{a}x$ 上，所以 $y_0=\dfrac{1}{a}x_0$ ②

由①②两式消去a，得 $y_0^2=\frac{1}{2}x_0$.

故M的轨迹方程为 $y^2=\frac{1}{2}x(y\neq 0,1)$. ……………………………………………………4 分

（2）如图，根据题意，设 $C(x_1,y_1)$，$G(x_2,y_2)$ $(x_1>x_2>0)$，



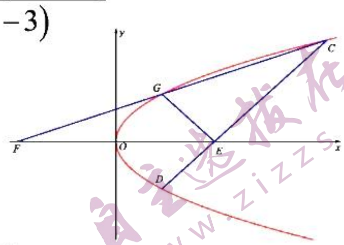
直线CG的方程为 $x=my+n$，联立抛物线方程 $y^2=\frac{1}{2}x$，

得 $2y^2-my-n=0$③

则 $\Delta=m^2+8n>0,\ y_1+y_2=\frac{m}{2},\ y_1\cdot y_2=-\frac{n}{2}$. ……………………………………6 分

又 $E(3,0)$，则 $k_{EC}+k_{EG}=\frac{y_1}{x_1-3}+\frac{y_2}{x_2-3}=\frac{(x_2-3)y_1+(x_1-3)y_2}{(x_1-3)(x_2-3)}$

$$=\frac{(my_2+n-3)y_1+(my_1+n-3)y_2}{(x_1-3)(x_2-3)}=\frac{2my_1y_2+(n-3)(y_1+y_2)}{(x_1-3)\cdot(x_2-3)}$$



$$=\frac{2m\cdot(-\frac{n}{2})+(n-3)\cdot\frac{m}{2}}{(x_1-3)(x_2-3)}=\frac{-\frac{m}{2}(n+3)}{(x_1-3)\cdot(x_2-3)}$$

因为 $k_{EC}+k_{EG}=0$，且 $m\neq 0$，所以 $n+3=0$，即 $n=-3$.

所以直线CG的方程为 $x=my-3(m>0)$，即CG过定点 $F(-3,0)$. ………8 分

所以 $S_{\triangle CEG}=S_{\triangle FEC}-S_{\triangle FEG}=\frac{1}{2}|EF|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$$=3\sqrt{\frac{m^2}{4}-4\times\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{m^2-24}.$$

根据题意，得 $\frac{3}{2}\sqrt{m^2-24}=\frac{15}{2}$. 由 $m>0$，解得 $m=7$. ……………………10 分

此时③式变为 $2y^2-7y+3=0$，解得 $y_1=3$，$y_2=\frac{1}{2}$，所以 $C(18,3)$.

设直线 CE 的倾斜角为 α，则 $\tan\alpha = k_{CE} = \dfrac{3-0}{18-3} = \dfrac{1}{5}$． ……………………………11 分

由题意，得 $\tan\angle CEG = \tan(\pi - 2\alpha) = -\tan 2\alpha$

$$= -\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = -\frac{2\times\frac{1}{5}}{1-(\frac{1}{5})^2} = -\frac{5}{12}.$$ ……………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。