江苏省百校大联考高三一轮复习阶段检测

数学试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设集合$M=\{x|\log_2 x<2\}$，$N=\{-2，0，1，2\}$，则 $M\cap N=$

A．$\{2\}$　　B．$\{1，2\}$　　C．$\{0，1，2\}$　　D．$\{-2，0，1，2\}$

【答案】 B

【解析】 $M=\{x|0<x<4\}$，$N=\{-2,0,1,2\}$，$M\cap N=\{1,2\}$，选 B.

2．已知$z=1+2\mathrm{i}$，则$\dfrac{2|z|}{\bar{z}+\mathrm{i}}=$

A．$\sqrt{5}+\sqrt{5}\mathrm{i}$　　B．$\sqrt{5}-\sqrt{5}\mathrm{i}$　　C．$-\sqrt{5}+\sqrt{5}\mathrm{i}$　　D．$-\sqrt{5}-\sqrt{5}\mathrm{i}$

【答案】 A

【解析】 $z=1+2\mathrm{i}$，$|z|=\sqrt{5}$，$\bar{z}=1-2\mathrm{i}$，

$\dfrac{2|z|}{\bar{z}+\mathrm{i}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{2\sqrt{5}(1+\mathrm{i})}{2}=\sqrt{5}+\sqrt{5}\mathrm{i}$，选 A.

3．已知抛物线 C：$y^2=4x$的焦点为 F，A 为抛物线 C 上第一象限的点，若$FA=\dfrac{7}{3}$，则直线 OA 的倾斜角为

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{4}$　　C．$\dfrac{\pi}{3}$　　D．$\dfrac{2\pi}{3}$

【答案】 C

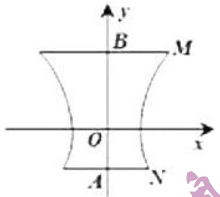
【解析】 $FA=\dfrac{7}{3}$，则A到准线$x=-1$距离为$\dfrac{7}{3}$，$\therefore x_A=\dfrac{4}{3}$.

A在第一象限，$y_A>0$，$\therefore y_A=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$\therefore k_{OA}=\sqrt{3}$，

OA的倾斜角为$\dfrac{\pi}{3}$，选 C.

4．如图所示的为陕西博物馆收藏的国宝——唐·金筐宝钿团花纹金杯，杯身曲线内收，玲珑娇美，巧夺天工，是唐代金银细作的典范之作．该杯的主体部分可以近似看作是双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的右支与 y 轴及平行于 x 轴的两条直线围成的曲边四边形 $ABMN$ 绕 y

轴旋转一周得到的几何体．若该金杯主体部分的上杯口外直径为$\frac{10\sqrt{3}}{3}$，下底座外直径为$\frac{2\sqrt{39}}{3}$，杯高为6，且杯身最细之处到上杯口的距离是到下底座距离的2倍，则双曲线C的离心率为



A．2　　B．$\sqrt{2}$　　C．3　　D．4

【答案】A

【解析】设金杯主体部分的上口外直径为$\frac{10\sqrt{3}}{3}$，下底座外直径为$\frac{2\sqrt{39}}{3}$，杯高为6，且杯身最细处到上杯口的距离是到下底座距离的2倍．

$\therefore M\left(\frac{5\sqrt{3}}{3},4\right)$，$N\left(\frac{\sqrt{39}}{3},-2\right)$，$M$、$N$都在双曲线：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上，

$\therefore\begin{cases}\frac{25}{3a^2}-\frac{16}{b^2}=1\\ \frac{13}{3a^2}-\frac{4}{b^2}=1\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}a=\sqrt{3}\\ b=3\end{cases}$，则$c=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{3}$，$\therefore e=\frac{c}{a}=2$，选A.

5．设$a=2^{-\frac{1}{2}}$，$b=\log_{\frac{1}{2}}3$，$c=\tan50°$，则

A．$a>b>c$　　B．$b>c>a$　　C．$c>b>a$　　D．$c>a>b$

【答案】D

【解析】$a\in(0,1)$，$b<0$，$c>\tan45°=1$，$\therefore c>a>b$，选D.

6．对于函数$f(x)$，若在定义域内存在实数x，满足$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为“局部奇函数”，已知函数$f(x)=e^x-a$在$\mathbf{R}$上为“局部奇函数”，则实数a的最小值为

A．1　　B．2　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{3}{2}$

【答案】A

【解析】$f(x)$为局部奇函数，则$f(-x)=-f(x)$在$\mathbf{R}$上有解，

即$e^{-x}-a=-(e^x-a)$，$\therefore e^x+e^{-x}=2a$，

$\because e^x+e^{-x}\geq 2$，$\therefore 2a\geq 2$，即$a\geq 1$，$\therefore a_{\min}=1$，选A.

7. 定义“等方差数列”：如果一个数列从第二项起，每一项的平方与它的前一项的平方的差都等于同一个常数，那么这个数列就叫作等方差数列，这个常数叫作该数列的方公差．设$\{a_n\}$是由正数组成的等方差数列，且方公差为4，$a_5=3\sqrt{2}$，则数列$\left\{\dfrac{2}{a_n+a_{n+1}}\right\}$的前24项和为

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. 3　　C. $3\sqrt{2}$　　D. 6

【答案】C

【解析】$\{a_n\}$是方公差为4的等方差数列，$\therefore a_{n+1}^2-a_n^2=4$，$a_5^2=18$，

$\therefore a_n^2=4n-2$，$\therefore a_n=\sqrt{4n-2}$，

$$\therefore \frac{2}{a_n+a_{n+1}}=\frac{2}{\sqrt{4n-2}+\sqrt{4n+2}}=\frac{2(\sqrt{4n+2}-\sqrt{4n-2})}{(4n+2)-(4n-2)}=\frac{1}{2}(\sqrt{4n+2}-\sqrt{4n-2})$$

$$S_{24}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})+\frac{1}{2}(\sqrt{10}-\sqrt{6})+\cdots+\frac{1}{2}(\sqrt{98}-\sqrt{94})$$

$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{98}-\sqrt{2})=\dfrac{1}{2}(7\sqrt{2}-\sqrt{2})=3\sqrt{2}$，选C.

8. 过曲线C：$y=\ln x$上一点$A(1,0)$作斜率为$k(0<k<1)$的直线，该直线与曲线C的另一交点为P，曲线C在点P处的切线交y轴于点N．若$\triangle APN$的面积为$4\ln 2-\dfrac{3}{2}$，则$k=$

A. $\dfrac{1}{3}\ln 2$　　B. $\dfrac{2}{3}\ln 2$　　C. $\dfrac{1}{2}\ln 2$　　D. $\ln 2$

【答案】B

【解析】设$P(x_0,\ln x_0)$，$y'=\dfrac{1}{x}$，$k'=\dfrac{1}{x_0}$，

切线：$y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$，令$x=0$，$y=\ln x_0-1$，$\therefore N(0,\ln x_0-1)$，

$$S_{\triangle AON}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(\ln x_0-1)=\frac{1}{2}\ln x_0-\frac{1}{2}.$$

过P作x轴的垂线，垂足为M，

$$S_{\triangle PMA}=\frac{1}{2}\cdot(\ln x_0)(x_0-1)=\frac{1}{2}x_0\ln x_0-\frac{1}{2}\ln x_0$$

梯形$PNOM$面积$S=\dfrac{1}{2}(\ln x_0-1+\ln x_0)\cdot x_0=x_0\ln x_0-\dfrac{1}{2}x_0$，

$\therefore 4\ln 2-\dfrac{3}{2}=x_0\ln x_0-\dfrac{1}{2}x_0-\left(\dfrac{1}{2}\ln x_0-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{2}x_0\ln x_0+\dfrac{1}{2}\ln x_0$，

即$4\ln 2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}x_0\ln x_0-\dfrac{1}{2}x_0+\dfrac{1}{2}$，$\therefore 4\ln 4=x_0\ln x_0-x_0+4$，

$\therefore x_0=4$，$P(4,\ln 4)$，$\therefore k=\dfrac{\ln 4}{3}=\dfrac{2}{3}\ln 2$，选 B.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．下列说法正确的有

A．“$a>b$”是“$|a|>|b|$”的充分不必要条件

B．命题“$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x-2=0$”的否定是“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x-2\neq 0$”

C．若命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+1>m$”是真命题，则实数 m 的取值范围是$(-\infty, 1)$

D．设 a，$b\in\mathbf{R}$，则“$ab+1\neq a+b$”的充要条件是“a，b 都不为 1”

【答案】BCD

【解析】$a>b$，可取$a=0,b=-1$，此时$|a|<|b|$，

$\therefore$ “$a>b$”不是“$|a|>|b|$”的充分条件，A 错.

命题“$\exists x\in\mathbf{R},x^2-x-2=0$”，否定“$\forall x\in\mathbf{R},x^2-x-2\neq 0$”，B 对.

命题“$\forall x\in\mathbf{R},x^2+1>m$”是真命题，$\therefore 1>m$，C 对.

若$ab+1\neq a+b$，即$ab+1-a-b\neq 0$，即$(a-1)(b-1)\neq 0$，

则$a\neq 1,b\neq 1$，充分.

若$a\neq 1,b\neq 1$，则$(a-1)(b-1)\neq 0$，则$1+ab\neq a+b$，必要，

$\therefore$ “$ab+1\neq a+b$”是“a,b都不为 1”的充要条件，D 对.

选 BCD.

10．已知$\{a_n\}$为等差数列，它的前 n 项和为S_n，若$a_1>0$，$S_{15}S_{17}<0$，则下列命题一定正确的是

A．公差 $d>0$　　B．$a_8=8$　　C．当S_n取最大值时，$n=8$　　D．$S_{14}<0$

【答案】BC

【解析】$S_{15}S_{17}=15a_8\cdot 17a_9<0$，即$a_8a_9<0$，$\because a_1>0$，$\therefore a_8>0, a_9<0$，B对.

$8d=a_9-a_1<0$，$\therefore d<0$，A错.

$n\le 8$时，$a_n>0$，$n\ge 9$时，$a_n<0$，$\therefore S_n$取最大值时$n=8$，C对.

$S_{14}=14a_1+\frac{14\times 13}{2}d=14\left(a_1+\frac{13}{2}d\right)$，

而$a_1+7d>0$，$a_1+8d<0$，即$-7d<a_1<-8d$，即$-\frac{d}{2}<a_1+\frac{13}{2}d<-\frac{3}{2}d$，

$\therefore a_1+\frac{13}{2}d>0$，D错.

选BC.

11．已知函数$f(x)=|\sin|x-\frac{\pi}{3}||$，下列命题正确的是

A．函数$f(x)$的最小正周期为π

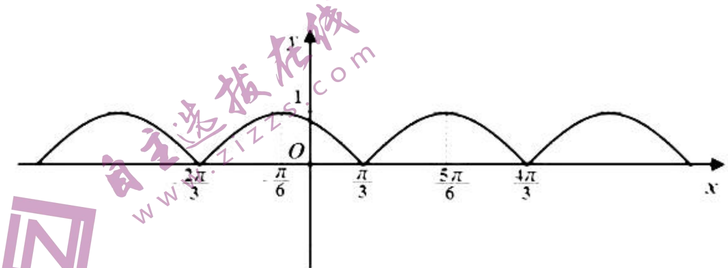
B．函数$f(x)$在$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$上为减函数

C．函数$f(x)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{6}$对称

D．函数$f(x)$的单调递增区间为$[\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{5\pi}{6}+k\pi](k\in \mathbf{Z})$

【答案】ACD

【解析】如图，$f(x+\pi)=\left|\sin\left|x+\frac{2}{3}\pi\right|\right|=f(x)$，$T=\pi$，A对.



$f(x)$在$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]\searrow$，$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]\nearrow$，B错.

$f(x)$关于$x=-\frac{\pi}{6}$对称，C对.

$f(x)$的递增区间$\left[\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{5}{6}\pi+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$，D对.

选 ACD.

12. 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=BC=2$，$AA_1=2\sqrt{2}$，M为线段BD上的动点，则

A. 当M为BD的中点时，$\triangle A_1MC_1$的周长最小

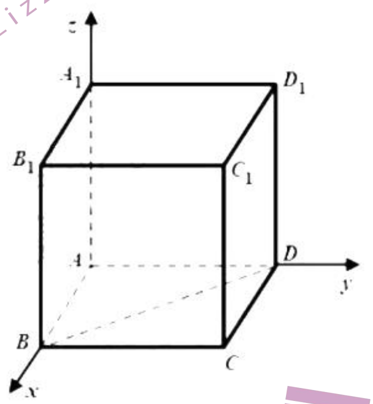
B. 三棱锥D_1-MCB_1的体积为定值

C. 在线段BD上存在点M，使得$AC_1\perp A_1M$

D. 在线段BD上有且仅有一个点M，使得$\angle AMC_1=120°$

【答案】AB
【解析】法一：

如图建系，则$A_1(0,0,2\sqrt{2})$，$C_1(2,2,2\sqrt{2})$，$B(2,0,0)$，$D(0,2,0)$，



$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BD}$，$\therefore M(2-2\lambda,2\lambda,0)$，

$MA_1+MC_1=\sqrt{(2-2\lambda)^2+(2\lambda)^2+8}+\sqrt{(-2\lambda)^2+(2\lambda-2)^2+8}$

$=2\sqrt{4\lambda^2-8\lambda+4+4\lambda^2+8}=2\sqrt{8\lambda^2-8\lambda+12}$，

$x=\frac{1}{2}$时，MA_1+MC_1最小，此时$S_{\triangle MA_1C_1}$周长最小，此时M为BD中点，A对.

$BD\,//\,B_1D_1$，则$BD\,//$平面B_1D_1C，M到平面B_1D_1C的距离h为定值，$S_{\triangle B_1D_1C}$为定值，

则$V_{M-B_1D_1C}=\frac{1}{3}S_{\triangle B_1D_1C}h$为定值，B对.

$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1M}=(2,2,2\sqrt{2})(2-2\lambda,2\lambda,-2\sqrt{2})=-4\neq 0$，

$\therefore$ 不存在点 M 使得 $AC_1 \perp A_1M$ ，C 错.

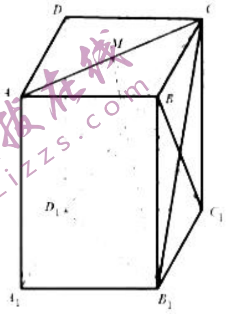
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC_1}=(2\lambda-2,-2\lambda,0)(2\lambda,2-2\lambda,2\sqrt{2})=8\lambda(\lambda-1)$ ，

$$\cos\angle AMC_1=\frac{8\lambda(\lambda-1)}{\sqrt{8\lambda^2-8\lambda+4}\sqrt{8\lambda^2-8\lambda+12}}=-\frac{1}{2}\text{，}\therefore\lambda(\lambda-1)=\frac{2-\sqrt{13}}{6}$$

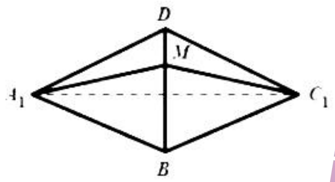
$\therefore \lambda^2-\lambda+\dfrac{\sqrt{13}-2}{6}=0$ ，$\therefore \Delta<0$ ，无解，D 错，选 AB.

法二：

对于 A，只需 A_1M+MC_1 最短，将面 A_1BD 和面 C_1BD 摊平，$A_1B=A_1D=2\sqrt{3}$ ，$BD=2\sqrt{2}$.



如下图，$A_1M+MC_1\geq A_1C_1$ ，此时 M 为 BD 中点，A 正确.



对于 B，$\because BD$ // 平面 B_1CD_1 ，$\therefore V_{D_1-MCB}=V_{M-B_1CD_1}=V_{B-B_1CD_1}$ 为定值，B 正确

对于 C，假设存在 M 使 $AC_1\perp A_1M$ ，又 $\because AC_1\perp BD$ ，$\therefore AC_1\perp$ 平面 A_1BD ，

但 AC_1 不垂直于 A_1D ，矛盾，故不存在这样的 M ，C 错.

对于 D，设 $DM=x$ ，$\therefore AM^2=4+x^2-2\sqrt{2}x$ ，

$$C_1M^2=(2\sqrt{2}-x)^2+12-2(2\sqrt{2}-x)\cdot2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}=x^2-3\sqrt{2}x+16$$

$$\frac{4+x^2-2\sqrt{2}x+x^2-3\sqrt{2}x+16-16}{2\sqrt{4+x^2-2\sqrt{2}x}\cdot\sqrt{x^2-3\sqrt{2}x+16}}=-\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow 2x^2-5\sqrt{x}+4=-\sqrt{x^2-2\sqrt{2}x+4}\sqrt{x^2-3\sqrt{2}x+16}$ ，

左边 $\geq -\dfrac{9}{4}$ ，右边 $<-\sqrt{23}$ ，显然无解，故存在，选 AB.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．设函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\leq a,\\ x^2, & x>a.\end{cases}$ 若 $f(2)>4$，则 a 的取值范围为__________.

【答案】$[2,+\infty)$

【解析】$f(2)>4$，$2^3>4$，$2^2=4$，$\therefore 2\leq a$，即 a 的取值范围 $[2,+\infty)$

14．已知 $\pi<\alpha<2\pi$，若 $\tan\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}$，则 $\tan\alpha=$__________.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2}$，$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2}$，

$\alpha\in(\pi,2\pi)$，$\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\therefore\sin\frac{\alpha}{2}>0$，$\cos\frac{\alpha}{2}<0$，

$\therefore\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=1$，$\therefore\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$，$\therefore\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{2}$，$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore\tan\alpha=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

15．已知点 B 为椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的上顶点，过 B 作圆 O：$x^2+y^2=r^2\left(0<r<\frac{6}{7}\right)$ 的切线 l，l 与椭圆 C 的另一交点为 Q，若 $OQ=\frac{\sqrt{13}}{2}$，则 $r=$__________.

【答案】$\frac{2\sqrt{7}}{7}$

【解析】$B(0,1)$，$Q(x_0,y_0)$，$OQ=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\sqrt{x_0^2+1-\frac{x_0^2}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}x_0^2+1}=\frac{\sqrt{13}}{2}$，

$\therefore x_0=\pm\sqrt{3}$，不妨设 $x_0=\sqrt{3}$，则 $y_0=\pm\frac{1}{2}$，

$y_0=-\frac{1}{2}$ 时，$Q\left(\sqrt{3},-\frac{1}{2}\right)$，$k_{BQ}=\frac{1+\frac{1}{2}}{0-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$BQ:y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+1$，即 $\frac{\sqrt{3}}{2}x+y-1=0$

O 到 BQ 距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{7}{4}}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}<\dfrac{6}{7}$，此时 $r=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

$y_0=\dfrac{1}{2}$ 上，$Q\left(\sqrt{3},\dfrac{1}{2}\right)$，$k_{BQ}=\dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{0-\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$BQ:\dfrac{\sqrt{3}}{6}x+y-1=0$，

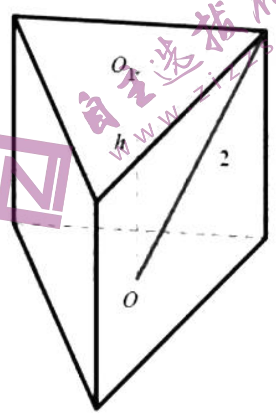
O 到 BQ 距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{13}{12}}}=\dfrac{\sqrt{156}}{13}>\dfrac{6}{7}$，舍，$\therefore r=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$．

16．已知一个底面半径和高都等于 2 的圆柱，挖去一个以上底面为底面，下底面圆心为顶点的圆锥后，所得几何体的体积与一个半径为 R 的半球的体积相等，则 $R=$________；若一个正三棱柱的下底面位于该半球的大圆上，上底面的三个顶点都在半球面上，则该正三棱柱体积的最大值为________．（本题第一空 2 分，第二空 3 分）

【答案】 2；4

【解析】 法一：

$V=\dfrac{2}{3}\cdot 4\pi\cdot 2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi R^3$，$\therefore R=2$，



设正三棱柱底面边长为 a，高为 h，

设上底面外接圆圆心为 O_1，球心设为 O，

$\therefore OO_1\perp$ 下底面，$\therefore O$ 为下底面的外接圆圆心，

$\therefore h^2+\left(\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2=4$，

$\therefore 4=h^2+\dfrac{1}{3}a^2$，即 $a^2=12-3h^2$，

$V_{棱柱}=\dfrac{1}{2}a\cdot a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}h=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2h=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(12-3h^2)h=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(-3h^3+12h)$，

令 $f(h)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(-3h^3+12h)$，$f'(h)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(-9h^2+12)=0$，$h=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

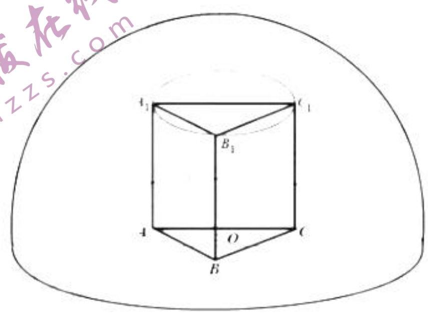
$f(h)$ 在 $\left(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\nearrow$，$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},2\right)\searrow$，

$\therefore f(h)_{\max}=f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{8\sqrt{3}}{3}+8\sqrt{3}\right)=4$．

法二：

$\frac{2}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 2=\frac{4}{3}\pi R^3\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow R=2$．

设正三棱柱底面边长为 a，高为 h，A_1、B_1、C_1 在半球上，O 为球心，



$\therefore OA=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，$\therefore\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2+h^2=4\Rightarrow\frac{1}{3}a^2+h^2=4$，$0<a<2\sqrt{3}$，

$\therefore V_{棱柱}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h$，

$V^2=\frac{3}{16}a^4h^2=\frac{3}{16}a^4\left(4-\frac{1}{3}a^2\right)=\frac{27}{4}\cdot\frac{1}{6}a^2\cdot\frac{1}{6}a^2\left(4-\frac{1}{3}a^2\right)\le\frac{27}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^3=16$

$\Rightarrow V\le 4$，当且仅当 $a=2\sqrt{2}$ 时取"="

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．(10 分)已知向量 $\boldsymbol{a}=(\frac{1}{2},\sin x)$，$\boldsymbol{b}=(\cos x,\frac{\sqrt{3}}{2})$，函数 $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$．

(1)若 $f(\alpha)=\frac{3}{5}$，且 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，求 $f(\alpha-\frac{\pi}{6})$ 的值；

(2)将 $y=f(x)$ 图象上每一个点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变)，再将得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，求函数 $g(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 的值域．

【解析】

（1）$f(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，

$f(\alpha)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，$\therefore f\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\alpha$，

$\because\frac{2\pi}{3}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$，$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)>0$，$\therefore\alpha+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$，

$\therefore\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{4}{5}$，

$\therefore\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$

（2）将$y=f(x)$图象上每一点横坐标变为原先的$\frac{1}{2}\Rightarrow y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

$g(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

$\because\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}$，$\therefore\frac{2\pi}{3}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{4\pi}{3}$，

$\therefore -1\le\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le-\frac{1}{2}$，故$g(x)$在$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$上的值域为$\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$.

18.（12分）已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, & n\text{ 为奇数},\\ 3a_n, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

(1)记$b_n=a_{2n-1}$，求出b_1的值，并证明数列$\{b_n\}$为等比数列；

(2)若数列$\{a_n\}$的前$2n$项和为S_{2n}，求满足不等式$\frac{1}{5}S_{2n}>3^n-1$的n的最小值.

【解析】

（1）由$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n,n\text{为奇数},\\ 3a_n,n\text{为偶数}.\end{cases}$

而$b_{n+1}=a_{2n+1}=3a_{2n}=3a_{2n-1+1}=3\cdot 2a_{2n-1}=6a_{2n-1}=6b_n$，$b_1=a_1=1$，

$\therefore \dfrac{b_{n+1}}{b_n}=6$，$\therefore \{b_n\}$成等比数列且首项为1，公比为6，$\therefore b_2=6$.

（2）法一：

由（1）知$b_n=a_{2n-1}=6^{n-1}$，$\therefore a_{2n}=a_{2n-1+1}=2a_{2n-1}=2\cdot 6^{n-1}$，

$\therefore S_{2n}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}+a_2+a_4+a\cdots+a_{2n}$

$=6^0+6^1+\cdots+6^{n-1}+2(6^0+6+\cdots+6^{n-1})$

$=3\cdot\dfrac{1(1-6^n)}{1-6}=\dfrac{3}{5}\cdot(6^n-1)$，

$\therefore \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{3}{5}(6^n-1)>3^n-1\Rightarrow 3\cdot 6^n-3>25(3^n-1)\Rightarrow 3\cdot 6^n-25\cdot 3^n+22>0$，

令$b_n=3\cdot 6^n-25\cdot 3^n+22$，$b_{n+1}-b_n=3\cdot 6^{n+1}-25\cdot 3^{n+1}-3\cdot 6^n+25\cdot 3^n$

$=15\cdot 6^n-50\cdot 3^n=5\cdot 3^n(3\cdot 2^n-10)$，

当$n=1$时，$b_{n+1}<b_n\Rightarrow b_2<b_1$，当$n\geq 2$时，$b_{n+1}>b_n\Rightarrow b_2<b_3<b_4<\cdots$

而$b_1=-35<0$，$b_2<b_1<0$，$n\geq 2$时，$\{b_n\}\nearrow$，注意到$b_3<0$，

$b_4=3\cdot 2^4\cdot 3^4-25\cdot 3^4+22=23\cdot 3^4+22>0$，$\therefore n_{\min}=4$.

法二：

由$\dfrac{1}{5}S_{2n}>3^n-1\Rightarrow \dfrac{3}{25}(6^n-1)>3^n-1$

$\Rightarrow 3\cdot 6^n-25\cdot 3^n+22>0\Rightarrow(3\cdot 2^n-25)\cdot 3^n+22>0$

若$n=1,2,3$，$(3\cdot 2^n-25)\cdot 3^n+22<0$，

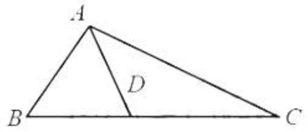
当$n\geq 4$时，$3\cdot 2^n-25>0$，$\therefore(3\cdot 2^n-25)\cdot 3^n+22>0$，

$n_{\min}=4$.

19. (12分)如图，在$\triangle ABC$中，$\cos B=\dfrac{3}{5}$，点D在BC边上，$AC=2\sqrt{2}AD=2\sqrt{2}$，$\angle DAC=45°$.

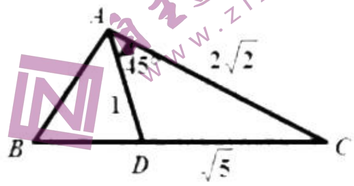
(1)求$\cos C$；

(2)求△ABD 的面积.



【解析】

(1) $CD=\sqrt{1+8-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{5}$，



$\therefore \cos C=\frac{8+5-1}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

(2) $\cos B=\frac{3}{5}$，$\sin B=\frac{4}{5}$

$\cos\angle ADC=\frac{6-8}{2\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\angle ADC=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore \sin\angle ADB=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\angle BAD=\sin(\angle ADC-\angle B)$

$=\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{10\sqrt{5}}{25}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

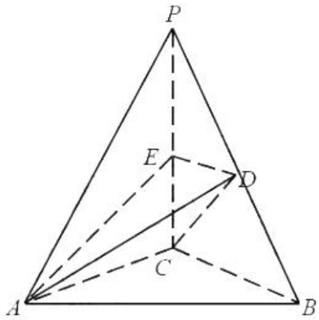
在△ABD中，$\frac{AB}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{1}{\frac{4}{5}}\Rightarrow AB=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times 1\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{2}$

20.(12 分)如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PC\perp$平面 ABC，$AC\perp BC$，$AC=BC=\frac{1}{2}PB$，$AD\perp PB$ 于点 D，点 E 在侧棱 PC 上，且 $CE=\lambda CP(0<\lambda<1)$.

(1)证明：$PB\perp$平面 ACD；

(2)是否存在λ，使二面角 $C-AD-E$ 的余弦值为$\frac{4\sqrt{37}}{37}$？若存在，求出λ的值；若不存在，说明理由.

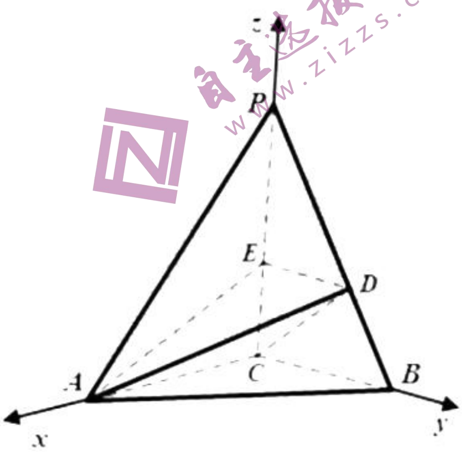


【解析】

（1）证明：$\because PC\perp$平面ABC，$\therefore PC\perp AC$，又$\because AC\perp BC$，$PC\cap BC=C$，

$\therefore AC\perp$平面PBC，$\therefore AC\perp PB$，又$\because AD\perp PB$，$AC\cap AD=A$，$\therefore PB\perp$平面ACD.

（2）如图建系，不妨设$AC=BC=2$，$\therefore PB=4$，$PC=2\sqrt{3}$，$BD=1$，



$\therefore D\left(0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$A(2,0,0)$，$C(0,0,0)$，$E(0,0,2\sqrt{3}\lambda)$，

$\overrightarrow{CA}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{AD}=\left(-2,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AE}=(-2,0,2\sqrt{3}\lambda)$，

设平面CAD和平面ADE的一个法向量分别为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CA}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x_1=0\\ -2x_1+\frac{3}{2}y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_1}=(0,1,-\sqrt{3})$，

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x_2+\dfrac{3}{2}y_2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_2=0\\ -2x_2+2\sqrt{3}\lambda z_2=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=(3\lambda,4\lambda-1,\sqrt{3}),$$

设二面角 $C-AD-E$ 的平面角为 θ，$\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$ 所成角为 φ，

$$\therefore\cos\theta=|\cos\varphi|=\frac{|4\lambda-1-3|}{2\sqrt{9\lambda^2+16\lambda^2-8\lambda+1+3}}=\frac{4\sqrt{37}}{37}\Rightarrow 3\lambda^2+2\lambda-1=0,$$

$(3\lambda-1)(\lambda+1)=0\Rightarrow\lambda=\dfrac{1}{3}\in(0,1)$，故存在，$\lambda=\dfrac{1}{3}$.

21．(12 分)已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的离心率为$\dfrac{1}{2}$，且$P(\sqrt{2}，\dfrac{\sqrt{6}}{2})$是 C 上一点.

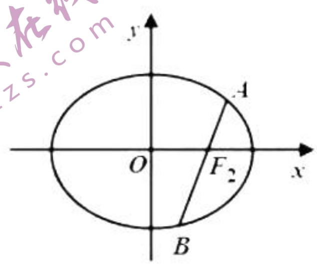
(1)求椭圆 C 的方程；

(2)过右焦点F_2作直线 l 交椭圆 C 于 A，B 两点，在 x 轴上是否存在点 M，使$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$为定值？若存在，求出点 M 的坐标及该定值；若不存在，试说明理由.

【解析】

（1）由题意知$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{2}{a^2}+\dfrac{\frac{3}{2}}{b^2}=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$，$\therefore$椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）设直线 AB 的方程为 $x=my+1$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，



$$\begin{cases}x=my+1\\ 3x^2+4y^2=12\end{cases}\Rightarrow 3(m^2y^2+2my+1)+4y^2=12，(3m^2+4)y^2+6my-9=0，$$

假设存在这样的 $M(t,0)$ 符合题意，则 $\overrightarrow{MA}=(x_1-t,y_1)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2-t,y_2)$

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1-t)(x_2-t)+y_1y_2=(my_1+1-t)(my_2+1-t)+y_1y_2$$

$$=(m^2+1)y_1y_2+m(1-t)(y_1+y_2)+(1-t)^2$$

$$=(m^2+1)\cdot\frac{-9}{3m^2+4}+m(1-t)\cdot\frac{-6m}{3m^2+4}+(1-t)^2$$

$$=\frac{-9m^2-9-6m^2+6m^2t+3m^2-6m^2t+3m^2t^2+4-8t+4t^2}{3m^2+4}$$

$=\dfrac{(3t^2-12)m^2+4t^2-8t-5}{3m^2+4}$，要使其为定值，则 $\dfrac{3t^2-12}{3}=\dfrac{4t^2-8t-5}{4}$

，解得 $t=\dfrac{11}{8}$

$\therefore$ 存在 $M\left(\dfrac{11}{8},0\right)$ 符合题意，该定值为 $-\dfrac{135}{64}$.

22．(12 分)已知函数 $f(x)=x\ln x+ax^2$.

(1)设函数 $g(x)=f'(x)$，讨论 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的单调性；

(2)若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1，x_2(极值点是指函数取极值时对应的自变量的值)，且 $x_1f(x_2)+x_2f(x_1)>0$，证明：$-\dfrac{1}{2e}<a<0$.

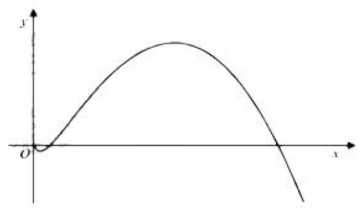
【解析】

（1）$g(x)=\ln x+1+2ax$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}+2a=\dfrac{1+2ax}{x}$，

当 $a\geq0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↗；

当 $a<0$ 时，令 $g'(x)=0\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2a}$

当 $0<x<-\dfrac{1}{2a}$ 时，$g'(x)>0,g(x)$↗；当 $x>-\dfrac{1}{2a}$ 时，$g'(x)<0,g(x)$↘.



（2）由（1）知若 $f(x)$ 存在两个极值点，则 $a<0$，

且 $g(x)_{\max}=g\left(-\frac{1}{2a}\right)=\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)=0\Rightarrow 0>a>-\frac{1}{2}$，

且注意到 $g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{2a}{e}<0$，$g\left(\frac{1}{a^2}\right)=\ln\frac{1}{a^2}+1+\frac{2}{a}<\frac{1}{a}+1<0$

$\therefore g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},-\frac{1}{2a}\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{2a},\frac{1}{a^2}\right)$ 上各有一个零点 x_1,x_2，

且 $0<x<x_1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)\searrow$；当 $x_1<x<x_2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)\nearrow$；

当 $x>x_2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)\searrow$.

$\therefore x_1,x_2$ 是 $f(x)$ 的两个极值点.

$\frac{f(x_2)}{x_2}+\frac{f(x_1)}{x_1}>0\Rightarrow \ln x_2+ax_2+\ln x_1+ax_1>0$

$\Rightarrow \ln x_1x_2+a(x_1+x_2)>0\Rightarrow a>\frac{-\ln x_1x_2}{x_1+x_2}$，

且 $\begin{cases}\ln x_1+1+2ax_1=0\\ \ln x_2+1+2ax_2=0\end{cases}\Rightarrow \ln x_1x_2+2+2a(x_1+x_2)=0\Rightarrow a=\frac{-\ln x_1x_2-2}{2(x_1+x_2)}$，

$\therefore \frac{-\ln x_1x_2-2}{2(x_1+x_2)}>\frac{-\ln x_1x_2}{x_1+x_2}\Rightarrow \ln x_1x_2>2\Rightarrow x_1x_2>e^2$，

而 $\ln x_1-\ln x_2=2a(x_2-x_1)$，$\therefore -\frac{1}{2a}=\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}>e$，

$\therefore -\frac{1}{2e}<a<0$，证毕.