# 2023年春高二(下)期末联合检测试卷
# 数学　参考答案

## 一、选择题

1~8　　BAAA　　DCCB

第8题解析：$\because \cos 2x\cdot f(x)+\sin 2x\cdot f'(x)>-f(x)$，$\therefore \cos x\cdot f(x)+\sin x\cdot f'(x)>0$，

设 $g(x)=\sin x\cdot f(x)$，$\therefore g(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，$\therefore g\left(\frac{\pi}{6}\right)>g(0)\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right)>0$

$g\left(\frac{\pi}{6}\right)>g\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f\left(-\frac{\pi}{6}\right)>0$，$g\left(\frac{\pi}{3}\right)>g\left(\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)>\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$g(0)>g(-1)\Rightarrow f(-1)>0$，$g(1)>g(0)\Rightarrow f(1)>0$.

## 二、选择题

9．AB　　10．AB　　11．AD　　12．BCD

第 12 题解析：第2行的第2个数是1，不是 $C_2^{2-1}=2$，A 错误；由题 $a_n=a_{n-1}+C_n^1=a_{n-1}+n$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的奇数项与前一项奇偶性相反，偶数项与前一项奇偶性相同，$\because a_1=1$ 为奇数，

$\therefore a_2$ 为奇数，$a_3$ 为偶数，$a_4$ 为偶数，$a_5$ 为奇数，$a_5$ 是奇数项且为奇数，这与 $a_1$ 情况一致，从而奇偶性产生循环，B 正确；由于 $C_n^m=C_n^{n-m}$，不妨设 $m\le\frac{n}{2}$，令 $C_n^m=70$，当 $m=1$ 时，$n=70$，$\therefore C_{70}^1=C_{70}^{69}=70$，当 $m=2$ 时，$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}=70$，无正整数解，当 $m=3$ 时，$C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$，$C_8^3=56<70$，$C_9^3=84>70$，而 $C_n^3$ 递增，从而无解；当 $m=4$ 时，$C_n^4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$，$n=8$ 时 $C_8^4=70$，由于 $C_8^4$ 是第 9 行中最中间的数，杨辉三角中以该数为顶点的下方三角形区域中的数都大于 $70$，$\therefore$ 当 $5\le m\le\frac{n}{2}$ 时，$C_n^m\ne 70$，70 共出现3次，C 正确；类似于前 $C_{210}^1=C_{210}^{209}=210$，$C_{21}^2=C_{21}^{19}=210$，$C_{10}^4=C_{10}^6=210$，

$\therefore$ 以 $C_{10}^4,C_{10}^6$ 为顶点的下方三角形区域中的数都大于 $210$，D 正确

## 三、填空题

13．$\frac{1}{2}$　　14．$-\frac{1}{e}$　　15．0.8185　　16．36

第 16 题解析：将芝士和芝麻看成一个整体，热干面和蛋烘糕看成一个整体，即相当于四个对象分配给三个场馆，每个场馆至少一个对象，$\therefore$ 必有一个场馆含有两个对象，其余场馆各一个对象，可先选出有两个对象的场馆进行对象分配，再将其余对象进行分配，所以共有 $C_3^1C_4^2A_2^2=36$ 种方案

**四、解答题**

17.（10分）

解：（1）由已知得 $2^n=32$，$\therefore n=5$，

则第 $r+1$ 项为 $T_{r+1}=C_5^r(\sqrt{x})^{5-r}(-\frac{2}{x})^r=C_5^r(-2)^r x^{\frac{5-3r}{2}}$，

$\because \frac{5-3r}{2}=1$ 得 $r=1$，$C_5^1(-2)=-10$，$\therefore$ 展开式中 $x$ 项的系数为 $-10$；…………5分

（2）由（1）知第 $r+1$ 项的系数为 $C_5^r(-2)^r$，$r=0,1,2,3,4,5$，

$\therefore$ 当 $r=1,3,5$ 时，$C_5^r(-2)^r<0$，而 $T_{0+1}=x^{\frac{5}{2}}, T_{2+1}=40x^{-\frac{1}{2}}, T_{4+1}=80x^{-\frac{7}{2}}$，

$\therefore$ 第4+1项是项的系数最大，该项为 $80x^{-\frac{7}{2}}$ ……………10分

18.（12分）

解：（1）$\because f(x)=x^3+x^2+ax$，$\therefore f'(x)=3x^2+2x+a$，

由题意得 $f'(0)=0$，$\therefore a=0$；………………5分

（2）由（1）得 $f'(x)=3x(x+\frac{2}{3})$，当 $f'(x)>0$ 时得 $x>0, x<-\frac{2}{3}$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{2}{3})$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\frac{2}{3},0)$ 上单调递减，

当 $x=-\frac{2}{3}$ 时，$f(x)$ 的极大值为 $f(-\frac{2}{3})=\frac{4}{27}$，

当 $x=0$ 时，$f(x)$ 的极小值为 $f(0)=0$………………12分

19.（12分）

解：（1）由题 $\bar{t}=3$，$\bar{y}=\frac{8+7.2+5.8+4.9+4.1}{5}=6$

$\hat{b}=\frac{79.9-5\times3\times6}{55-5\times9}=-\frac{10.1}{10}=-1.01$，$\hat{a}=6+1.01\times3=9.03$

回归方程为 $y=-1.01t+9.03$ …………6分

（2）预计2023年该药材市场该种中药材每10克的价格为

$-1.01\times6+9.03=2.97$ 元…………12分

20.（12分）

解：（1）设男生样本中有 $m$ 人选择历史

由题 $P(X=1)=\frac{C_{20}^2C_{30}^1}{C_{50}^3}$，$P(Y=0)=\frac{C_m^2}{C_{50}^2}$

$\because P(X=1)=\frac{95}{12}P(Y=0)$，$\therefore \frac{C_{20}^2C_{30}^1}{C_{50}^3}=\frac{95}{12}\cdot\frac{C_m^2}{C_{50}^2}$，解得 $m=10$

| | 选物理 | 选历史 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 女生 | 20 | 30 | 50 |
| 男生 | 40 | 10 | 50 |
| 合计 | 60 | 40 | 100 |

…………5 分

（2）零假设为 $H_0$：该校高二学生的性别与选课相互独立，即高二学生的性别与选课有关联

由（1）中列表得 $\chi^2=\dfrac{100\times(20\times10-40\times30)^2}{60\times40\times50\times50}=\dfrac{50}{3}>x_{0.001}=10.828$

∴根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，推断 $H_0$ 不成立，即认为高二学生性别与选课的有关联，

此推断犯错误的概率不大于 0.001…………10 分

（3）$P(X+Y=0)=P(X=0)\cdot P(Y=0)$ …………12 分

21.（12 分）

解：（1）设甲队获胜为事件 $A$

则 $P(A)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{27}{48}>\dfrac{1}{2}$，∴甲队获胜的概率大…………5 分

（2）由题意，甲队的胜负平场次、积分和概率如下表：

| 胜 | 平 | 负 | 积分 | 概率 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 0 | 9 | $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ |
| 2 | 1 | 0 | 7 | $C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$ |
| 2 | 0 | 1 | 6 | $C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$ |
| 1 | 2 | 0 | 5 | $C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{3}{32}$ |
| 1 | 0 | 2 | 3 | $C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{3}{32}$ |
| 1 | 1 | 1 | 4 | $C_3^1\frac{1}{2}C_2^1\frac{1}{4}\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$ |
| 0 | 0 | 3 | 0 | $\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$ |
| 0 | 3 | 0 | 3 | $\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$ |
| 0 | 2 | 1 | 2 | $C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 1 | $C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$ |

所以，随机变量 $X$ 的概率分布列为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{3}{64}$ | $\frac{3}{64}$ | $\frac{7}{64}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{3}{32}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{8}$ |

故随机变量 $X$ 的数学期望：

$$EX=0\times\frac{1}{64}+1\times\frac{3}{64}+2\times\frac{3}{64}+3\times\frac{7}{64}+4\times\frac{3}{16}+5\times\frac{3}{32}+6\times\frac{3}{16}+7\times\frac{3}{16}+9\times\frac{1}{8}$$

$=\frac{21}{4}$…………12 分

22.（12 分）

解：（1）$\because$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=e^x-a$，

$\therefore$ 当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上是减函数，在 $(\ln a,+\infty)$ 上是增函数，此时函数 $f(x)$ 的最小值是 $f(\ln a)=a(2-\ln a)$，

$\because f(\ln a)<0\Leftrightarrow a(2-\ln a)<0\Leftrightarrow a>e^2$，

当 $a>e^2$ 时，$f(x)$ 有两个零点；

当 $a<0$ 或 $a=e^2$ 时，$f(x)$ 有一个零点；

当 $0\leqslant a<e^2$ 时，$f(x)$ 没有零点 …………5 分

（2）由题设知 $a>e^2$，不妨设 $x_1<x_2$，则由（1）易知，$1<x_1<\ln a<x_2$，

为了证明 $x_1x_2<\ln^2 a$，而 $x_1+x_2>2\sqrt{x_1x_2}$，只要证明 $x_1+x_2<2\ln a$ 即可，

即证明 $2\ln a-x_2>x_1$，又 $\because 2\ln a-x_2\in(-\infty,\ln a)$，$x_1\in(-\infty,\ln a)$，

而 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上是减函数，即证明 $f(2\ln a-x_2)<f(x_1)$ 即可，

而 $f(x_1)=f(x_2)$，设 $g(x)=f(x)-f(2\ln a-x)$，

$g'(x)=f'(x)+f'(2\ln a-x)=e^x+e^{2\ln a-x}-2a$，

$\therefore g'(x)=e^x+\frac{a^2}{e^x}-2a\geqslant 2a-2a=0$，$\therefore g(x)$ 在 $R$ 上是增函数，由 $\ln a<x_2$，

$\therefore g(\ln a)<g(x_2)$，而 $g(\ln a)=0$，$\therefore g(x_2)=f(x_2)-f(2\ln a-x_2)>0$，

$\therefore f(2\ln a-x_2)<f(x_2)=f(x_1)$，$\therefore 2\ln a-x_2>x_1$，即 $x_1+x_2<2\ln a$，

$\therefore 2\sqrt{x_1x_2}<x_1+x_2<2\ln a$，即 $x_1x_2<\ln^2 a$…………12 分