姓　　名________

准考证号________

绝密★启用前

湘豫名校联考(2021年3月)

# 数学(文科)试卷

**注意事项:**

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第Ⅰ卷时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第Ⅱ卷时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

## 第Ⅰ卷

**一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.**

1. 已知全集$U$,集合$M,N$是$U$的子集,且$M\subsetneqq N$,则下列结论中一定正确的是

A. $(\complement_U M)\cup(\complement_U N)=U$　　B. $M\cap(\complement_U N)=\varnothing$

C. $M\cup(\complement_U N)=U$　　D. $(\complement_U M)\cap N=\varnothing$

2. 在复平面内,若复数$z$与$\frac{1-i}{1+2i}$表示的点关于虚轴对称,则复数$z=$

A. $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$　　B. $-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$　　C. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$　　D. $-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$

3. 关于$x$的方程$x^2-ax+b=0$.有下列四个命题:

甲:$x=1$是方程的一个根;乙:$x=-1$是方程的一个根;

丙:该方程两根之和为3;丁:该方程两根异号.

如果只有一个假命题,则假命题是

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

4. 在平面直角坐标系中定义点$P(x,y)$的"准奇函数点"为$P'(2a-x,2b-y)$,若函数$C$上所有点的"准奇函数点"都在函数$C$上,则称函数$C$为"准奇函数".下列函数不是"准奇函数"的是

A. $f(x)=\cos(x+1)$　　B. $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$

C. $f(x)=e^{|x|}$　　D. $f(x)=x$

5. 已知空间中不重合的直线 $a,b$ 和不重合的平面 $\alpha,\beta$,下列判断正确的是

A. 若 $a/\!/\alpha,b/\!/\alpha$,则 $a/\!/b$　　B. 若 $a/\!/b,b\subset\alpha$,则 $a/\!/\alpha$

C. 若 $a\perp b,a\perp\alpha$,则 $b/\!/\alpha$　　D. 若 $a\perp\alpha,a\perp\beta$,则 $\alpha/\!/\beta$

6. 已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,若向量 $\boldsymbol{c}=\sqrt{5}\boldsymbol{a}+\sqrt{3}\boldsymbol{b}$,则 $\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=$

A. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{8}$　　D. $\frac{\sqrt{59}}{8}$

7. 已知 $x,y$ 满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ x+y-4\geqslant 0,\\ y\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=-2x+y$ 的最大值是

A. $-1$　　B. $-2$　　C. $-5$　　D. $-7$

8. 下列函数中,同时满足以下两个条件①"$\forall x\in\mathbf{R},f\left(-\frac{\pi}{6}+x\right)+f\left(-\frac{\pi}{6}-x\right)=0$";②"将图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后得到的图象对应函数为 $g(x)=\cos 2x$"的一个函数是

A. $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$　　B. $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$　　C. $\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)$　　D. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

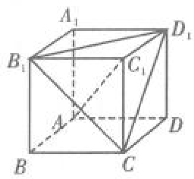
9. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中,$A(3,0),B(0,-3)$,点 $M$ 满足 $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,$x+y=1$,点 $N$ 为曲线 $y=\sqrt{-x^2-2x}$ 上的动点,则 $|MN|$ 的最小值为

A. $2\sqrt{2}-1$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$

10. 已知双曲线 $T$ 的焦点在 $x$ 轴上,对称中心为原点,$\triangle ABC$ 为等边三角形. 若点 $A$ 在 $x$ 轴上,点 $B,C$ 在双曲线 $T$ 上,且双曲线 $T$ 的虚轴为 $\triangle ABC$ 的中位线,则双曲线 $T$ 的渐近线方程为

A. $y=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}x$　　B. $y=\pm\frac{5}{3}x$　　C. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　D. $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}x$

11. 已知正方体棱长为 6,如图,有一球的球心是 $AC_1$ 的中点,半径为 2,平面 $B_1D_1C$ 截此球所得的截面面积是




A. $\pi$　　B. $7\pi$　　C. $4\pi$　　D. $3\pi$

12. 数列 $\{a_n\}$ 各项均是正数,$a_1=\frac{1}{2}$,$a_2=\frac{3}{2}$,函数 $y=\frac{1}{3}x^3$ 在点 $\left(a_n,\frac{1}{3}a_n^3\right)$ 处的切线过点 $\left(a_{n+2}-2a_{n+1},\frac{7}{3}a_n^3\right)$,则下列命题正确的个数是

①$a_3+a_4=18$;

②数列 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 是等比数列;

③数列 $\{a_{n+1}-3a_n\}$ 是等比数列;

④$a_n=3^{n-1}$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

# 第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 函数 $f(x)=3x-\cos x$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线与直线 $2x-my+1=0$ 垂直，则实数 $m$ 的值为________.

14. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(-x)=2$，$g(x)=\frac{1}{x}+1$，$y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 交于点 $(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=$________.

15. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1-a_3=-\frac{8}{27}$，$a_2-a_4=-\frac{8}{9}$，则使得 $a_1a_2\cdots a_n$ 取得最小值的 $n$ 为________.

16. 已知过点 $A(2,2)$ 作直线 $AB$，$AC$ 与圆 $x^2+(y-2)^2=1$ 相切，且交抛物线 $x^2=2y$ 于 $B$，$C$ 两点，则 $BC$ 的直线方程为________.

三、解答题：本大题共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

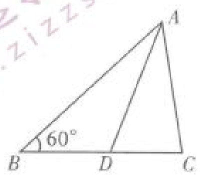
（一）必考题：共 60 分.

17.（本小题满分 12 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=60°$，$AB=8$，$AD=7$，点 $D$ 在 $BC$ 上，且 $\cos\angle ADC=\frac{1}{7}$.

(1)求 $BD$；

(2)若 $\cos\angle CAD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.




18.（本小题满分 12 分）

某校食堂按月订购一种螺蛳粉，每天进货量相同，进货成本每碗 6 元，售价每碗 10 元，未售出的螺蛳粉降价处理，以每碗 5 元的价格当天全部处理完. 根据往年销售经验，每天需求量与当天最高气温（单位：℃）有关. 如果最高气温不低于 25，需求量为 200 碗；如果最高气温位于区间[20,25)，需求量为 300 碗；如果最高气温低于 20，需求量为 500 碗. 为了确定六月份的订购计划，统计了前三年六月份各天的最高气温数据，得下面的频数分布表：

| 最高气温 | [10,15) | [15,20) | [20,25) | [25,30) | [30,35) | [35,40) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 天数 | 4 | 7 | 25 | 36 | 16 | 2 |

以最高气温位于各区间的频率估计最高气温位于该区间的概率.

(1)求六月份这种螺蛳粉一天的需求量不超过 300 碗的概率;

(2)设六月份一天销售这种螺蛳粉的利润为 $Y$(单位:元),当六月份这种螺蛳粉一天的进货量为 450 碗时,写出 $Y$ 的所有可能值,并估计 $Y$ 的平均值(即加权平均数).

19.(本小题满分 12 分)

图 1 是由正方形 $ABCD$,Rt$\triangle ABE$,Rt$\triangle CDF$ 组成的一个平面图形,其中 $AB=AE=DF=1$,将其沿 $AB$、$CD$ 折起使得点 $E$ 与点 $F$ 重合,如图 2.

(1)证明:图 2 中的平面 $ABE$ 与平面 $ECD$ 的交线平行于底面 $ABCD$;

(2)求图中 2 中几何体 $A$—$BCE$ 的体积.

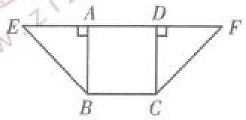



图 1

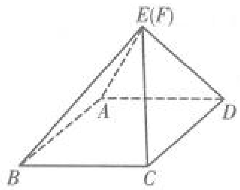


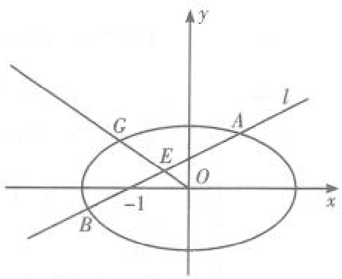

图 2

20.(本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 $xOy$ 中,已知椭圆 $C$:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$,且过点 $(0,1)$. 如图所示,斜率为 $k(k>0)$且过点$(-1,0)$的直线 $l$ 交椭圆 $C$ 于 $A$,$B$ 两点,线段 $AB$ 的中点为 $E$,射线 $OE$ 交椭圆 $C$ 于点 $G$,若 $F$ 在射线 $OE$ 上,且$|OG|^2=|OE|\cdot|OF|$.

(1)求椭圆 $C$ 的标准方程;

(2)求证:点 $F$ 在定直线上.



21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}x-2\sin x+\sqrt{3}-1(x>0)$,$g(x)=2\sqrt{3}x-5\sin x-\sqrt{3}\cos x+3$.

(1)求 $f(x)$在$[0,\pi]$上的最小值;

(2)证明:$g(x)>f(x)$.

**(二)选考题:共 10 分.请考生在 22、23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分.**

22.(本小题满分 10 分)**[选修 4—4:坐标系与参数方程]**

在平面直角坐标系 $xOy$ 中,曲线 $C_1$ 的参数方程为$\begin{cases}x=2\sqrt{3}\cos\alpha,\\ y=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数且 $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$),以坐标原点 $O$ 为极点,$x$ 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 $C_2$ 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$.

(1)说明 $C_1$ 是哪种曲线,并将 $C_1$ 的方程化为极坐标方程;

(2)设点 $A$ 的极坐标为$\left(4\sqrt{3},\frac{\pi}{2}\right)$,射线 $\theta=\gamma\left(0<\gamma<\frac{\pi}{2}\right)$与 $C_1$ 的交点为 $M$(异于极点),与 $C_2$ 的交点为 $N$(异于极点),若$|MN|=\sqrt{3}|MA|$,求 $\tan\gamma$ 的值.

23.(本小题满分 10 分)**[选修 4—5:不等式选讲]**

已知函数 $f(x)=|2$[illegible]$|x+3|$.

(1)求不等式 $f(x)$[illegible]$1$ 的解集;

(2)若 $\forall$[illegible]$\in\mathbf{R}$,使得 $f(x)\geqslant\cos x+a$ 成立,求实数 $a$ 的取值范围.

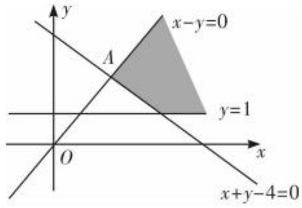
# 湘豫名校联考(2021年3月)

## 数学(文科)参考答案

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | B | A | A | C | D | B | B | D | C | A | A | B |

7. B 【解析】画出约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant 0,\\ x+y-4\geqslant 0,\\ y\geqslant 1\end{cases}$所表示的平面区域,如图所示,




由目标函数$z=-2x+y$可化为$y=2x+z$.

当直线$y=2x+z$过点A时,在y轴上的截距最大,此时目标函数取得最大值,

又由$\begin{cases}x+y-4=0,\\ x-y=0,\end{cases}$解得A(2,2),

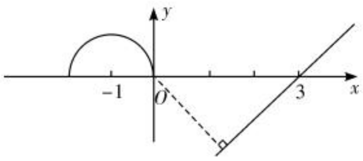
所以z的最大值为$-2\times 2+2=-2$.

故选:B.

9. C 【解析】点M在直线AB:$y=x-3$上,

点N在曲线:$(x+1)^2+y^2=1(y\geqslant 0)$上,

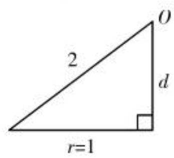
$\therefore |MN|_{\min}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.




10. A 【解析】设双曲线方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,虚轴长为$2b$,则$BC=4b$,BC关于x轴对称,不妨设B在双曲线左支,则其纵坐标为$2b$,根据$\triangle ABC$为等边三角形,$\angle ABC=60^\circ$可得$x_B=-\sqrt{3}b$,故$B(-\sqrt{3}b,2b)$.将B的坐标代入双曲线方程有$\dfrac{3b^2}{a^2}-\dfrac{4b^2}{b^2}=1$,则$\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{5}{3}$,则渐近线方程为$y=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{3}x$.

11. A 【解析】$\because$正方体的棱长为6,

$\therefore$体对角线为$6\sqrt{3}$,球心到平面$B_1D_1C$的距离为体对角线的$\dfrac{1}{6}$,




$\therefore d=\dfrac{1}{6}\times 6\sqrt{3}=\sqrt{3}$,又球半径$R=2$,设截面圆半径为r,则$r=\sqrt{R^2-d^2}=1$,

$\therefore S=\pi r^2=\pi$.

12. B 【解析】由 $y=\frac{1}{3}x^3$ 得 $y'=x^2$，

$$k_{切}=a_n^2=\frac{\frac{1}{3}a_n^3-\frac{7}{3}a_n^3}{a_n-(a_{n+2}-2a_{n+1})}=\frac{-2a_n^3}{a_n-a_{n+2}+2a_{n+1}},$$

$\therefore a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=2a_n\Rightarrow a_{n+2}-2a_{n+1}=3a_n(*)$，

①$n=1,a_3-2a_2=3a_1\Rightarrow a_3=3\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{2}=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$，

$n=2,a_4-2a_3=3a_2\Rightarrow a_4=3\times\frac{3}{2}+2\times\frac{9}{2}=9+\frac{9}{2}=\frac{27}{2}$，

$\therefore a_3+a_4=\frac{9}{2}+\frac{27}{2}=\frac{36}{2}=18$，正确；

②由$(*)$知 $a_{n+2}+a_{n+1}=3(a_{n+1}+a_n)$，$\therefore$首项 $a_1+a_2\neq0,q=3\neq0$，$\therefore\{a_n+a_{n+1}\}$是等比数列，正确；

③$a_{n+2}-3a_{n+1}=-1(a_{n+1}-3a_n)$，首项 $a_2-3a_1=\frac{3}{2}-3\times\frac{1}{2}=0$，不符合等比数列的定义，错误；

④解法一：由②对可知：$a_n+a_{n-1}=2\times3^{n-2}$，

两边同除 $3^n$ 得$\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}\cdot\frac{a_{n-1}}{3^{n-1}}=\frac{2}{9}$，

令$\frac{a_n}{3^n}=b_n$，$\therefore b_n+\frac{1}{3}b_{n-1}=\frac{2}{9}\Rightarrow b_n=-\frac{1}{3}b_{n-1}+\frac{2}{9},n\geqslant2$.

$\therefore b_n-\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}\left(b_{n-1}-\frac{1}{6}\right)$，

$b_1-\frac{1}{6}=\frac{a_1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{\frac{1}{2}}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$，即数列$\left\{b_n-\frac{1}{6}\right\}$是恒为 0 的常数列.

$\therefore b_n-\frac{1}{6}=0\Rightarrow\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{6}\Rightarrow a_n=\frac{1}{6}\cdot3^n=\frac{1}{2}\cdot3^{n-1}$，故错误.

解法二：由③知：$a_n-3a_{n-1}=0\Rightarrow a_n=3a_{n-1}$，$\because a_1=\frac{1}{2}\neq0,q=3\neq0$，

$\therefore\{a_n\}$是以$\frac{1}{2}$为首项，3 为公比的等比数列，

$\therefore a_n=\frac{1}{2}\cdot3^{n-1}$. 故错误.

故选 B.

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $-6$ 【解析】因为 $f'(x)=3+\sin x$，$f'(0)=3$，所以在$(0,f(0))$处的切线的斜率为 3，因为切线与直线 $2x-my+1=0$ 互相垂直，$y=\frac{2}{m}x+\frac{1}{m}$，所以$\frac{2}{m}\times3=-1$，解得 $m=-6$.

14. 2 【解析】因为 $f(x)+f(-x)=2$，所以 $y=f(x)$关于点$(0,1)$对称，

$y=g(x)=\frac{1}{x}+1$ 也关于点$(0,1)$对称，则交点关于$(0,1)$对称，

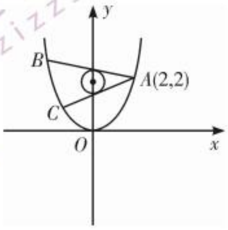
$\therefore y_1+y_2=2$.

15. 3 或 4 【解析】设公比为 $q$，则 $q=\frac{a_2-a_4}{a_1-a_3}=3$，$\therefore a_1-a_3=-8a_1=-\frac{8}{27}$，

$\therefore a_1=\frac{1}{27},a_2=\frac{1}{9},a_3=\frac{1}{3},a_4=1,\cdots$，

$\therefore n=3$ 或 4 时，$a_1a_2\cdots a_n$ 取得最小值.

16. $6x+3y+4=0$ 【解析】设 $B\left(x_1,\frac{x_1^2}{2}\right)$，$C\left(x_2,\frac{x_2^2}{2}\right)$，




$\therefore l_{AB}:(x_1+2)x-2y-2x_1=0$，

$\because$ 圆心到直线 $AB$ 的距离 $d=\frac{|-4-2x_1|}{\sqrt{(x_1+2)^2+4}}=1$，$\therefore 3x_1^2+12x_1+8=0\Rightarrow 6x_1+3y_1+4=0$，

同理：$6x_2+3y_2+4=0$，

$\therefore l_{BC}:6x+3y+4=0$.

**三、解答题：本大题共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.**

17.【解析】(1) $\because \cos\angle ADB=\cos(\pi-\angle ADC)=-\cos\angle ADC=-\frac{1}{7}$，…… 1 分

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $8^2=BD^2+7^2-2\cdot BD\cdot 7\cdot\cos\angle ADB$，…… 3 分

$\Rightarrow BD=3$ 或 $-5$（舍）. …… 4 分

(2) 由已知 $\sin\angle ADC=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，$\sin\angle CAD=\frac{1}{2}$，…… 6 分

$\therefore \sin C=\sin(\angle ADC+\angle CAD)=\frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{13}{14}$， …… 8 分

由正弦定理得 $CD=\frac{AD\sin\angle CAD}{\sin C}=\frac{7\times\frac{1}{2}}{\frac{13}{14}}=\frac{49}{13}$. …… 10 分

$\therefore BC=3+\frac{49}{13}=\frac{88}{13}$，…… 11 分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{88}{13}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{176\sqrt{3}}{13}$. …… 12 分

18.【解析】(1) $P=1-\frac{4+7}{1+7+25+36+16+2}=1-\frac{11}{90}=\frac{79}{90}$. …… 4 分

(2) $P(200)=\frac{54}{90}=0.6$，$Y_1=200\times4+250\times(-1)=800-250=550$（元），…… 6 分

$P(300)=\frac{25}{90}=\frac{5}{18}$，$Y_2=300\times4+150\times(-1)=1200-150=1050$（元），…… 8 分

$P(500)=\frac{11}{90}$，$Y_3=450\times4=1800$（元），…… 10 分

$\overline{Y}=550\times0.6+1050\times\frac{5}{18}+1800\times\frac{11}{90}=330+\frac{175\times5}{3}+20\times11=\frac{990}{3}+\frac{875}{3}+\frac{660}{3}=\frac{2525}{3}$. …… 12 分

19.【解析】(1)∵$CD/\!/AB$,$AB\subset$平面$ABE$,$CD\not\subset$平面$ABE$,

∴$CD/\!/$平面$ABE$, ………… 2分

∵$CD\subset$平面$ECD$,设平面$ABE\cap$平面$ECD=l$,

∴$l/\!/CD$,

∵$l\not\subset$平面$ABCD$,$CD\subset$平面$ABCD$,

∴$l/\!/$平面$ABCD$, ………… 4分

即平面$ABE$与平面$ECD$的交线平行底面$ABCD$. ………… 5分

注:将四棱锥补全成柱体亦可得证.

(2)∵$AB/\!/CD$,$AB\perp AE$,$CD\perp DE$,

∴$AB\perp DE$,

∵$AE\cap DE=E$,

∴$AB\perp$平面$AED$, ………… 7分

∵$AB\subset$平面$ABCD$.

∴平面$ABCD\perp$平面$AED$,

过$E$作$EG\perp AD$于点$G$,

∵平面$ABCD\cap$平面$AED=AD$,

∴$EG\perp$平面$ABCD$,

∵$AE=DE=AD=1$,

∴$EG=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ………… 9分

在正方形$ABCD$中,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}$, ………… 10分

$V_{A-BCE}=V_{E-ABC}=\frac{1}{3}EG\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{12}$. ………… 12分

20.【解析】(1)已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$,且过点$(0,1)$,

所以$b=1$, ………… 1分

又$c=\sqrt{a^2-b^2}$,

则$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以$a=\sqrt{3}$, ………… 3分

故椭圆$C$的标准方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$. ………… 4分

(2)设直线$l$的方程为$y=k(x+1)(k>0)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

联立$\begin{cases}y=k(x+1),\\ \frac{x^2}{3}+y^2=1,\end{cases}$得$(3k^2+1)x^2+6k^2x+3k^2-3=0$,

由题意知$\Delta>0$恒成立,

由韦达定理得$x_1+x_2=-\frac{6k^2}{3k^2+1}$,所以$y_1+y_2=\frac{2k}{3k^2+1}$,

由于 $E$ 为线段 $AB$ 的中点，因此 $x_E=-\dfrac{3k^2}{3k^2+1}$，$y_E=\dfrac{k}{3k^2+1}$，

此时 $k_{OE}=\dfrac{y_E}{x_E}=-\dfrac{1}{3k}$.

所以 $OE$ 所在直线方程为 $y=-\dfrac{1}{3k}x$， ………………………………………… 6 分

将其代入椭圆 $C$ 的方程，并由 $k>0$，

解得 $G\left(-\dfrac{3k}{\sqrt{3k^2+1}},\dfrac{1}{\sqrt{3k^2+1}}\right)$，

又 $E\left(-\dfrac{3k^2}{3k^2+1},\dfrac{k}{3k^2+1}\right)$， ………………………………………… 8 分

由 $|OG|^2=|OE|\cdot|OF|$ 得：$x_G^2=x_E\cdot x_F\Rightarrow x_F=\dfrac{x_G^2}{x_E}=\dfrac{\left(-\dfrac{3k}{\sqrt{3k^2+1}}\right)^2}{-\dfrac{3k^2}{3k^2+1}}=-3$， ………………… 11 分

因此，点 $F$ 在定直线 $x=-3$ 上. ………………………………………… 12 分

21.【解析】(1) $f'(x)=\sqrt{3}-2\cos x$，令 $f'(x)=0$，得 $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， ………………………… 1 分

故在区间 $[0,\pi]$ 上，$f'(x)$ 的唯一零点是 $x=\dfrac{\pi}{6}$， ………………………………………… 2 分

当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减， ………………………………………… 3 分

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{6},\pi\right]$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增， ………………………………………… 4 分

故在区间 $[0,\pi]$ 上，$f(x)$ 的最小值为 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}+\sqrt{3}-2$， ………………………… 5 分

(2)要证：当 $x>0$ 时，$2\sqrt{3}x-5\sin x-\sqrt{3}\cos x+3>\sqrt{3}x-2\sin x+\sqrt{3}-1$，

即证：当 $x>0$ 时，$\sqrt{3}x-3\sin x-\sqrt{3}\cos x+4-\sqrt{3}>0$. ………………………………… 6 分

令 $\varphi(x)=\sqrt{3}x-3\sin x-\sqrt{3}\cos x+4-\sqrt{3}$， ………………………………………… 7 分

$\therefore\varphi'(x)=\sqrt{3}-3\cos x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$， ………………………… 8 分

$\therefore x\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 时，$x-\dfrac{\pi}{3}\in\left(-\dfrac{\pi}{3},-\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\therefore\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$，$\therefore\varphi'(x)<0$，

$\therefore x\in\left(\dfrac{\pi}{6},\pi\right]$ 时，$x-\dfrac{\pi}{3}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right]$，$\therefore\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\in\left(-\dfrac{1}{2},1\right]$，$\therefore\varphi'(x)>0$，

$\therefore\varphi(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{\pi}{6},\pi\right]$ 上单调递增， ………………………………… 9 分

所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}-\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}+4-\sqrt{3}=1+\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}-\sqrt{3}>0$， ………………………… 10 分

所以 $x\in(0,\pi]$ 时，$\varphi(x)>0$，

而 $x\in(\pi,+\infty)$ 时，$\varphi(x)=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+4-\sqrt{3}>\sqrt{3}\pi-2\sqrt{3}+4-\sqrt{3}>0$，

综上，$x>0$ 时，$\varphi(x)>0$，即 $g(x)>f(x)$. ………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)因为曲线 $C_1$ 的参数方程为$\begin{cases}x=2\sqrt{3}\cos\alpha,\\ y=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sin\alpha,\end{cases}$所以 $C_1$ 是圆心为 $(0,2\sqrt{3})$,半径为 $2\sqrt{3}$ 的右半圆,所以 $C_1$ 的直角坐标方程为 $x^2+(y-2\sqrt{3})^2=12(x\geqslant0)$, ………… 2 分

由 $\rho^2=x^2+y^2$, $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$,得 $\rho^2-4\sqrt{3}\rho\sin\theta=0$,

所以 $C_1$ 的极坐标方程为 $\rho=4\sqrt{3}\sin\theta(\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right])$. ………… 5 分

(2)设 $M(\rho_1,\theta)$, $N(\rho_2,\theta)$, $\because\theta=\gamma$, $\therefore|OM|=4\sqrt{3}\sin\gamma$, $|ON|=4\cos\gamma$. ………… 6 分

$|MN|=||OM|-|ON||=|4\sqrt{3}\sin\gamma-4\cos\gamma|$, ………… 7 分

$|MA|=|OA|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=4\sqrt{3}\cos\gamma$, ………… 8 分

因为 $|MN|=\sqrt{3}|MA|$,所以 $|4\sqrt{3}\sin\gamma-4\cos\gamma|=\sqrt{3}\times4\sqrt{3}\cos\gamma\Rightarrow\tan\gamma=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 或 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$(舍).

所以 $\tan\gamma=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. ………… 10 分

23.【解析】(1)当 $x\geqslant0$ 时,不等式化为$\begin{cases}2x-(x+2)\leqslant1,\\ x\geqslant0,\end{cases}$解得 $0\leqslant x\leqslant3$;

当 $-2<x<0$ 时,不等式化为$\begin{cases}-2x-(x+2)\leqslant1,\\ -2<x<0,\end{cases}$解得 $-1\leqslant x<0$;

当 $x\leqslant-2$ 时,不等式化为$\begin{cases}-2x+(x+2)\leqslant1,\\ x\leqslant-2,\end{cases}$无解.

综上,原不等式的解集为 $\{x|-1\leqslant x\leqslant3\}$. ………… 5 分

(2)由已知可得 $f(x)-\cos x\geqslant a\Rightarrow(f(x)-\cos x)_{\min}\geqslant a$, ………… 6 分

$\because f(x)=|x|+|x|-|x+2|\geqslant|x|-|x-(x+2)|=|x|-2\geqslant-2$,当且仅当 $x=0$ 时等号成立,

………… 8 分

又 $-\cos x\geqslant-1$,当且仅当 $x=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 时等号成立. ………… 9 分

综上,可知 $f(x)-\cos x\geqslant-3$,当且仅当 $x=0$ 时等号成立,

所以 $a\leqslant-3$. ………… 10 分