

秘密★启用前

## 曲靖市第二中学学联体 2023 届高三联考(第二次) 数学试卷

(满分 150 分,考试时间 120 分钟)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必用黑色碳素笔将自己的学校、姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上,并认真核准条形码上的学校、姓名、准考证号、考场号、座位号,在规定的位置贴好条形码。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{-1, 0, 1, 3\}$ , 集合  $B = \{x | x^2 - 3x - 4 < 0, x \in \mathbb{Z}\}$ , 则  $A \cap B$  的真子集个数为( )

- A. 2                                      B. 7                                      C. 8                                      D. 15

2.  $(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})(1 - i)$  的值是( )

- A.  $-\sqrt{2}i$                               B.  $\sqrt{2}i$                               C.  $2i$                                       D.  $-2i$

3. 马戏表演中小猴子模仿人做引体向上运动的节目深受观众们的喜爱,当小猴子两只胳膊拉着单杠处于平衡状态时,每只胳膊的拉力大小为  $50N$ ,此时两只胳膊的夹角为  $60^\circ$ ,试估算小猴子的体重(单位:kg)约为( )

(参考数据:取重力加速度大小为  $g = 10m/s^2, \sqrt{3} \approx 1.732$ )

- A. 9.2                                      B. 7.5                                      C. 8.7                                      D. 6.5

4. 已知平面向量  $\vec{m} = (4, 3), \vec{n} = (2, 0), \vec{t} = m + kn$ ,若  $\langle \vec{m}, \vec{t} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{t} \rangle$ ,则  $k =$  ( )

- A.  $\frac{2}{5}$                                       B. 5                                      C. 2                                      D.  $\frac{5}{2}$

5. 有首歌曲“大理三月好风光,蝴蝶泉边好梳妆”,近年来大理州一直致力开发旅游事业,吸引着大批的游客前往大理旅游. 现有甲、乙两位游客慕名来到大理,准备从苍山、洱海、大理古城、崇圣寺三塔、蝴蝶泉五个景点中随机选择一个景点游玩,记事件  $A$  为“甲和乙至少一人选择蝴蝶泉”,事件  $B$  为“甲和乙选择的景点不同”,则  $P(B|A) =$  ( )

- A.  $\frac{3}{5}$                                       B.  $\frac{8}{9}$                                       C. 2                                      D.  $\frac{5}{2}$

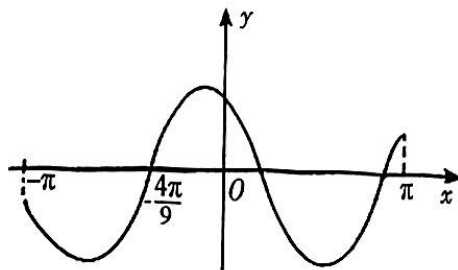
数学试卷·第1页·共6页

6. 设  $m > 0, n > 0, e$  是自然对数的底数, 则下列选项中正确的是( )
- A. 若  $e^m - 2m = e^n - 3n$ , 则  $m < n$                       B. 若  $e^m - 2m = e^n - 3n$ , 则  $m > n$
- C. 若  $e^m + 2m = e^n + 3n$ , 则  $m > n$                       D. 若  $e^m + 2m = e^n + 3n$ , 则  $m < n$
7. 已知定义在  $R$  上的奇函数  $f(x)$  在区间  $(-\infty, 0)$  上单调递增, 且  $f(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$ ,  $\triangle ABC$  的内角  $B$  满足  $f(\cos B) \leq 0$ , 则角  $B$  的取值范围是( )
- A.  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{5\pi}{6}, \pi)$                       B.  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{5\pi}{6}, \pi)$
- C.  $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi)$                       D.  $(0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \pi)$
8. 在平面直角坐标系  $xOy$  中,  $M$  是以  $F$  为焦点的抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  上任意一点,  $N$  是线段  $MF$  上的点, 且  $|MN| = \frac{3}{4}|MF|$ , 则直线  $ON$  斜率的最大值为( )
- A. 1                      B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 函数  $f(x) = 2\cos(\omega x + \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$  在区间  $[-\pi, \pi]$  的图象如下图, 则下列说法正确的是( )

- A. 函数  $f(x)$  的最小正周期为  $\frac{2\pi}{3}$
- B. 函数  $f(x)$  的最小正周期为  $\frac{4\pi}{3}$
- C. 函数  $f(x)$  的图象关于  $x = \frac{\pi}{9}$  对称
- D. 函数  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  单调递减



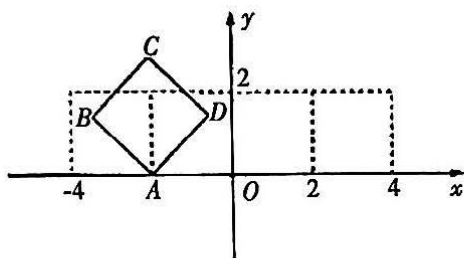
10. 为弘扬文明、和谐的社区文化氛围, 更好地服务社区群众, 某市社区组织开展了“党员先锋”、“邻里互助”两个公益服务项目, 其中某个星期内两个项目的参与人数(单位: 人)记录如下:

日期项目	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六	星期日
党员先锋	21	22	25	24	36	75	70
邻里互助	12	13	12	11	118	134	141

对于该星期内的公益服务情况,下列说法正确的有( )

- A. “党员先锋”项目参与人数的极差为 54,中位数为 24
- B. “邻里互助”项目参与人数的众数为 12,平均数为 63
- C. 用频率估计概率,“党员先锋”项目连续 3 天参与人数不低于 24 的概率为  $\frac{3}{5}$
- D. 用频率估计概率,“邻里互助”项目连续 2 天参与人数不低于该项目平均数的概率为  $\frac{1}{3}$

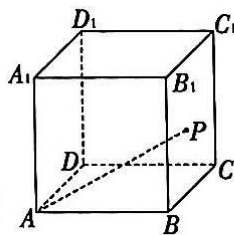
11. 在平面直角坐标系  $xOy$  中,如图放置的边长为 2 的正方形  $ABCD$  沿  $x$  轴滚动(无滑动滚动),点  $D$  恰好经过坐标原点,设顶点  $B(x,y)$  的轨迹方程是  $y=f(x)$ ,则对函数  $y=f(x)$  的判断正确的是( )



- A. 函数  $y=f(x)$  是偶函数
- B. 对任意的  $x \in \mathbb{R}$ , 都有  $f(x+4) = f(x-4)$
- C. 函数  $y=f(x)$  的值域为  $[0, 2\sqrt{2}]$
- D. 函数  $y=f(x)$  在区间  $[8, 10]$  上单调递增

12. 如图,点  $P$  是棱长为 2 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的表面上一个动点,则( )

- A. 当  $P$  在平面  $BCC_1B_1$  上运动时,三棱锥  $P-AA_1D$  的体积为定值  $\frac{4}{3}$
- B. 当  $P$  在线段  $AC$  上运动时,  $D_1P$  与  $A_1C_1$  所成角的取值范围是  $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$
- C. 若  $F$  是  $A_1B_1$  的中点,当  $P$  在底面  $ABCD$  上运动,且满足  $PF \parallel$  平面  $B_1CD_1$  时,  $PF$  长度的最小值是  $\sqrt{5}$
- D. 使直线  $AP$  与平面  $ABCD$  所成的角为  $45^\circ$  的点  $P$  的轨迹长度为  $\pi+4\sqrt{2}$



三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知  $(ax^2+1)\left(x-\frac{2}{x}\right)^5$  的展开式中各项系数的和为 -4,则该展开式中  $x^3$  的系数为\_\_\_\_\_.
14. 若  $a, b$  为正实数,直线  $x+(2a-1)y+1=0$  与直线  $bx+2y-1=0$  互相垂直,则  $ab$  的最大值为\_\_\_\_\_.
15. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$  虚轴的一个顶点为  $D$ , 直线  $x=3a$  与  $C$  交于  $A, B$  两点,若  $\triangle ABD$  的垂心在  $C$  的一条渐近线上,则  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.
16. 若不等式  $e^{x-1} - mx - 2n - 3 \geq 0$  对  $\forall x \in \mathbb{R}$  恒成立,其中  $m \neq 0$ ,则  $\frac{n}{m}$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

四、解答题:本题共6小题,共70分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分10分)已知等差数列 $\{a_n\}$ ,其前 $n$ 项和为 $S_n$ .满足 $S_3=9$ ,且6是 $a_2+1$ 和 $a_5$ 的等比中项.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设 $b_n=2^n+a_n$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$ ,求 $T_n$ .

18. (本小题满分12分)在① $\sin A \cos\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$ , ② $\frac{a \cos C + \sqrt{3} c \sin A}{b+c}=1$ 这两个条件中任选一个,补充

在下面的问题中,并解答问题.

在 $\triangle ABC$ 中,内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ ,且满足\_\_\_\_\_.

(1)求角 $A$ ;

(2)若 $AC=8$ ,点 $D$ 是线段 $BC$ 的中点, $DE \perp AC$ 于点 $E$ ,且 $DE=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ,求 $CE$ 的长.



19. (本小题满分 12 分) 已知四边形  $ABCD$  如图 1 所示  $AD \parallel BC$ ,  $AB = AD = DC = \frac{1}{2}BC = 2$ , 将  $\triangle ABD$  沿  $BD$  折起得到四面体  $A'BCD$ , 如图 2 所示,  $A'C = 2\sqrt{2}$ .

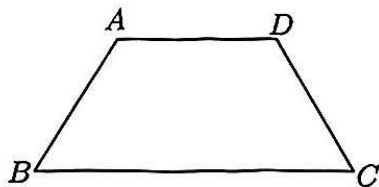


图1

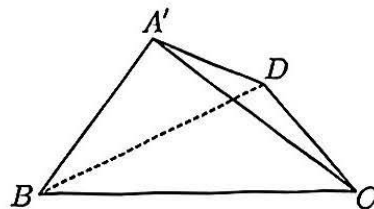


图2

- (1) 求空间四面体  $A'BCD$  的体积;
- (2) 求直线  $A'D$  与平面  $A'BC$  所成角的正弦值.

20. (本小题满分 12 分) 从 2023 年起, 云南省高考数学试卷中增加了多项选择题(第 9-12 题是四道多选题, 每题有四个选项, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分). 在某次模拟考试中, 每道多选题的正确答案是两个选项的概率为  $p$ , 正确答案是三个选项的概率为  $1-p$  (其中  $0 < p < 1$ ). 现甲乙两名学生独立解题.

- (1) 假设每道题甲全部选对的概率为  $\frac{1}{2}$ , 部分选对的概率为  $\frac{1}{4}$ , 有选错的概率为  $\frac{1}{4}$ ; 乙全部选对的概率为  $\frac{1}{6}$ , 部分选对的概率为  $\frac{1}{2}$ , 有选错的概率为  $\frac{1}{3}$ , 求这四道多选题中甲比乙多得 13 分的概率;
- (2) 对于第 12 题, 甲同学只能正确地判断出其中的一个选项是符合题意的, 乙同学只能正确地判断出其中的一个选项是不符合题意的, 作答时, 应选择几个选项才有希望得到更理想的成绩, 请你帮助甲或者乙做出决策(只需选择帮助一人做出决策即可).

21. (本小题满分 12 分) 已知椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $F_1, F_2$  为  $E$  的左、右焦点, 若

过右焦点  $F_2$  的直线与椭圆  $E$  交于不同的两点  $M, N$ ,  $\triangle MNF_1$  的周长为 8.

(1) 求椭圆  $E$  的方程;

(2) 已知过点  $P(0, 2)$  且斜率为  $k$  的直线  $l$  与椭圆  $E$  有两个不同的交点  $A, B$ , 在  $x$  轴上是否存在一点  $Q$ , 使得  $\triangle QAB$  是以点  $Q$  为直角顶点的等腰直角三角形? 若存在, 求出  $k$  的值及点  $Q$  的坐标; 若不存在, 说明理由.

22. (本小题满分 12 分) 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + a \ln x - 4x (a > 0)$ .

(1) 当  $a = 3$  时, 试讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(2) 设函数  $f(x)$  有两个极值点  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ , 证明:  $f(x_1) + f(x_2) > \ln a - 10$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

