2023 年兰州高三诊断

文科数学参考答案及评分标准

1. C　2. C　3. A　4. D　5. D　6. B　7. A　8. B　9. A　10. B　11. C　12. B

12.【解析】$f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)$

$\therefore \Delta=4[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)]=4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\geq 0$

由于 a，b，c 不相等，所以 $\Delta>0$，所以函数必有两个不相同的零点

因为 $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}\sin\frac{3}{2}<\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$，$c=\ln\sqrt{3}>\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}$

所以 $c>a>b$

因此 $f(a)=(a-b)(a-c)<0$，$f(b)=(b-c)(b-a)>0$，$f(c)=(c-a)(c-b)>0$

所以函数的两个零点分别在区间 $(b,\ a)$ 和 $(a,\ c)$，故选 A

13. 1　　14. $\sqrt{3}$　　15. $\frac{30\sqrt{11}}{11}$ 或 $\frac{81\sqrt{77}}{77}$ 或 $\frac{160\sqrt{231}}{231}$　16. ②

16.【解析】对于函数①，$\frac{f(x+T)}{f(x)}=\frac{2x+2T+1}{2x+1}=1+\frac{2T}{2x+1}$，不是常数，因此①不是"$\xi$ 函数"；对于函数②，$\frac{f(x+T)}{f(x)}=\frac{(\frac{1}{2})^{3x+3T-2}}{(\frac{1}{2})^{3x-2}}=(\frac{1}{2})^{3T}$，为常数，因此②是"$\xi$ 函数"；对于函数③，$\frac{f(x+T)}{f(x)}=\frac{(x+2T)^3}{x^3}$，不是常数，因此③不是"$\xi$ 函数"；对于函数④，定义域不为 $\mathbf{R}$，且 $\frac{f(x+T)}{f(x)}=\frac{\ln(x+T-1)}{\ln(x-1)}$，不是常数，因此④不是"$\xi$ 函数"

17.【解析】(1)因为数列 $\{a_n\}$ 对任意的 $i\in\mathbf{N}^*$ 都有 $a_{n+i}-a_n=i$，所以当 $i=1$ 时满足 $a_{n+1}-a_n=1$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$．……………………6 分

(2)因为数列 $\{b_n\}$ 满足：$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_n}{a_{n+2}}$ 且 $b_1=1$，

所以 $\frac{b_2}{b_1}=\frac{1}{3}$，$\frac{b_3}{b_2}=\frac{2}{4}$，$\frac{b_4}{b_3}=\frac{3}{5}$，…$\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}=\frac{n-2}{n}$，$\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}$

所以 $\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdot\frac{b_4}{b_3}\cdots\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\cdots\times\frac{n-2}{n}\times\frac{n-1}{n+1}$

即：$\dfrac{b_n}{b_1}=\dfrac{2}{n(n+1)}$，所以$b_n=\dfrac{2}{n(n+1)}(n\ge 2)$.

又因为$b_1=1=\dfrac{2}{1\times 2}$符合$\dfrac{2}{n(n+1)}$当$n=1$时的值，所以数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=\dfrac{2}{n(n+1)}(n\in N^*)$，

因为$b_n=\dfrac{2}{n(n+1)}=2(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$，所以$S_n=2(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})=2(1-\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{2n}{n+1}(n\in N^*)$

所以数列$\{b_n\}$的前n项和$S_n=\dfrac{2n}{n+1}(n\in N^*)$ ………………12 分

18.【解析】(1)方案一：选条件①②.

因为在四棱锥$S-ABCD$中$SB=SC$，点M是BC的中点，$SM=2$，所以$SM\perp BC$.

又因为在$Rt\Delta SBM$中，$\cos\angle SBM=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，所以$BM=1$.

又因为$ABCD$是矩形，$BC=2AB$，所以$BM=AB=1$，$AM=\sqrt{2}$，

由$SA=\sqrt{6}$，$AM=\sqrt{2}$，$SM=2$可得：$SA^2=AM^2+SM^2$，所以$SM\perp AM$.

则由$\begin{cases} SM\perp BC \\ SM\perp AM \\ AM\cap BC=M \end{cases}$可得：$SM\perp$底面$ABCD$，又因为$SM\subset$侧面$SBC$，

所以侧面$SBC\perp$底面$ABCD$. ………………6 分

方案二：选条件①③.

因为在四棱锥$S-ABCD$中$SB=SC$，点M是BC的中点，$SM=2$，所以$SM\perp BC$.

又因为在ΔSAM中，$SA=\sqrt{6}$，$\sin\angle SAM=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$SM=2$，

所以由正弦定理得：$\dfrac{SA}{\sin\angle SMA}=\dfrac{SM}{\sin\angle SAM}$，即$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin\angle SMA}=\dfrac{2}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$，所以$\sin\angle SMA=1$

即$\angle SMA=\dfrac{\pi}{2}$，所以$SM\perp MA$.

则由$\begin{cases} SM\perp BC \\ SM\perp AM \\ AM\cap BC=M \end{cases}$可得：$SM\perp$底面$ABCD$，又因为$SM\subset$侧面$SBC$，

所以侧面$SBC\perp$底面$ABCD$. ………………6 分

方案三：选条件②③.

因为在四棱锥$S-ABCD$中$SB=SC$，点M是BC的中点，$SM=2$，所以$SM\perp BC$.

又因为在 $Rt\Delta SBM$ 中，$\cos\angle SBM=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $BM=1$．

又因为 $ABCD$ 是矩形，$BC=2AB$，所以 $BM=AB=1$，$AM=\sqrt{2}$，

又因为在 ΔSAM 中，$\sin\angle SAM=\frac{\sqrt{6}}{3}$，则 $\cos\angle SAM=\frac{\sqrt{3}}{3}$

设 $SA=x$，$SM^2=SA^2+AM^2-2SA\cdot AM\cos\angle SAM$，

所以有：$3x^2-2\sqrt{6}x-6=0$，解之得 $x_1=\sqrt{6}$ 或 $x_2=-\frac{\sqrt{6}}{3}$（舍）所以 $SA=\sqrt{6}$．

由 $SA=\sqrt{6}$，$AM=\sqrt{2}$，$SM=2$ 可得：$SA^2=AM^2+SM^2$，所以 $SM\perp AM$．

则由 $\begin{cases} SM\perp BC \\ SM\perp AM \\ AM\cap BC=M \end{cases}$ 可得：$SM\perp$ 底面 $ABCD$，又因为 $SM\subset$ 侧面 SBC，

所以侧面 $SBC\perp$ 底面 $ABCD$．　　　　………………6 分

(2)在(1)条件下知 $SM\perp$ 底面 $ABCD$，因为点 M 是 BC 的中点，$SM=2$，$BM=AB=1$

在 ΔAMD 中，$AM=MD=\sqrt{2}$，$AD=2$，由此可得：$S_{\Delta AMD}=1$，$V_{三棱锥S-AMD}=\frac{1}{3}\cdot SM\cdot S_{\Delta AMD}=\frac{2}{3}$．

在 ΔASD 中，$AS=SD=\sqrt{6}$，$AD=2$，则 $S_{\Delta ASD}=\sqrt{5}$ ．

设点 M 到平面 SAD 的距离为 h，因为 $V_{三棱锥S-AMD}=V_{三棱锥M-ASD}$，则有 $V_{三棱锥M-ASD}=\frac{1}{3}\cdot h\cdot S_{\Delta ASD}=\frac{2}{3}$，所以

$h=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，即点 M 到平面 SAD 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$．………………12 分

19.【解析】(1)根据上述表格完成列联表：

	16 强	非 16 强	合计
欧洲地区	44	22	66
其他地区	36	58	94
合计	80	80	160

$$K^2=\frac{160\times(44\times58-22\times36)^2}{80\times80\times66\times94}=12.482>3.841$$

所以有 95%的把握认为球队进入世界杯 16 强与来自欧洲地区有关……………………………6 分

(2)设 3 支欧洲球队为 A、B、C，2 支美洲球队 a，b，1 支亚洲球队 1

这 6 支球队中两两对决的事件包括：(AB，Ca，$b1$)，(AB，Cb，$a1$)，(AB，ab，$C1$)，(AC，Bb，$a1$)，(AC，$B1$，ab)，(AC，Ba，$b1$)，(Aa，$B1$，Cb)，(Aa，Bb，$C1$)，(Aa，BC，$b1$)，(Ab，$B1$，Ca)，(Ab，BC，$a1$)， (Ab，Ba，C1)，(A1，Ba，Cb)，(A1，Ca，Bb)，(BC，A1，ab)则欧洲球队不碰面的概率为$P=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

……………………………12 分

20.【解析】(1) 由已知可得：$\begin{cases} bc=\sqrt{3}, \\ a=2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=\sqrt{3} \\ c=1 \end{cases}$（舍去）或 $\begin{cases} b=1 \\ c=\sqrt{3} \end{cases}$

所以椭圆 E 的方程是 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ………………5 分

(2) 由条件可知，直线 AB 的斜率必存在，设直线的方程为 $y=kx+d$

由 $\begin{cases} x^2+4y^2=4, \\ y=kx+d, \end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2+8kdx+4d^2-4=0$

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，故 $x_1+x_2=\frac{-8kd}{1+4k^2}$，$y_1+y_2=\frac{2d}{1+4k^2}$

所以点 P 坐标为 $(\frac{-4kd}{1+4k^2},\frac{d}{1+4k^2})$

由 $\begin{cases} x^2+4y^2=4m^2 \\ y=kx+d \end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+8kdx+4d^2-4m^2=0$

故 $\Delta=16(4m^2k^2-d^2+m^2)$

又由于点 P 在椭圆 E_1 上，因此 $(\frac{-4kd}{1+4k^2})^2+4(\frac{d}{1+4k^2})^2=4m^2$

所以 $4k^2d^2+d^2=m^2(1+4k^2)^2$　　所以 $d^2=m^2(1+4k^2)$

所以 $\Delta=16(4m^2k^2-d^2+m^2)=0$

所以椭圆 E_1 与直线 AB 相切 ………………12 分

21.【解析】(1) 可知函数的定义域为 $(0,+\infty)$

当 $n=1$ 时，$f(x)=(x-1)\ln x$，$f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}$

当 $0<x<1$ 时，$\ln x<0$，$1-\frac{1}{x}<0$，故 $f'(x)<0$，函数为减函数；当 $x>1$ 时，$\ln x>0$，$1-\frac{1}{x}>0$，故 $f'(x)>0$，函数为增函数，

综上，函数 $y=f(x)$ 的单调增区间为 $(1,+\infty)$，单调减区间为 $(0,1)$ ………6 分

(I)当 $n=2$ 时，$f(x)=x^2\ln x-2\ln x$，可知函数存在零点 1 和 $\sqrt{2}$，因此 Q 点坐标为 $(\sqrt{2},0)$

由于 $f'(x)=2x\ln x+x-\dfrac{2}{x}$，所以 $f'(\sqrt{2})=\sqrt{2}\ln 2$ 所以 $g(x)=(\sqrt{2}\ln 2)x-2\ln 2$

令 $h(x)=f(x)-g(x)$，则 $h'(x)=f'(x)-g'(x)=2x\ln x+x-\dfrac{2}{x}-\sqrt{2}\ln 2$

当 $1<x<\sqrt{2}$ 时，$2x\ln x-\sqrt{2}\ln 2<0$，$x-\dfrac{2}{x}<0$

所以 $h'(x)<0$，$h(x)$ 为减函数

同理，当 $x>\sqrt{2}$ 时，$h(x)$ 为增函数，所以 $h(x)\ge h(\sqrt{2})=0$

所以当 $x>1$ 时，$f(x)\ge g(x)$……………………12 分

22.【解析】(1)由条件可知曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2+(y-1)^2=1$，

曲线 C_2 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+y^2=1$，由 $\begin{cases}x^2+(y-1)^2=1,\\(x-1)^2+y^2=1,\end{cases}$ 可得公共弦方程 $x-y=0$，

$(\dfrac{|MN|}{2})^2=1-(\dfrac{1}{\sqrt{2}})^2$，解得线段 MN 的长度为 $\sqrt{2}$ ………………………………5 分

(2) 由条件可知曲线 C_2 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+y^2=a+1$，

将直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=3+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数)代入曲线 C_2 的直角坐标方程得：$t^2+\sqrt{2}t-a+4=0$

$|PA|\cdot|PB|=|t_1\cdot t_2|=|a-4|=1$，实数 $a=3$ 或 $a=5$

由于 $\Delta=2+4(a-4)=4a-12>0$，故 $a=5$ ………………………………10 分

23.【解析】(1)由 $\begin{cases}x\le -1\\-3x\ge 4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1<x<2\\x+4\ge 4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\ge 2\\3x\ge 4\end{cases}$ 解得 $x\le -\dfrac{4}{3}$ 或 $0\le x<2$ 或 $x\ge 2$，

所以不等式的解集为 $\left(-\infty,-\dfrac{4}{3}\right]\cup[0,+\infty)$………………………………………5 分

(2)因为 $f(x)+ax-1>0(x>0)$，所以 $a>\left[\dfrac{1-f(x)}{x}\right]_{max}$ $(x>0)$ 又因为 $f(x)=\begin{cases}x+4,0<x\le 2,\\3x,\ x>2,\end{cases}$

则 $\left[\dfrac{1-f(x)}{x}\right]=\begin{cases}-1-\dfrac{3}{x},0<x\le 2,\\-3+\dfrac{1}{x},\ x>2,\end{cases}$ 所以 $a>\left[\dfrac{1-f(x)}{x}\right]_{max}=-\dfrac{5}{2}$………………………………………10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。