湖北省高中名校联盟 2022～2023 学年度下学期高二联合测评

数学试卷参考答案与评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	B	B	C	B	B	C	CD	BD	BCD	ACD

1. A 【解析】由 $y'=2x-\frac{1}{x^2}$ 和切点 $P(1,2)$ 可知，切线的斜率 $k=1$，倾斜角 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，故选 A.

2. D 【解析】在递增等比数列中，由 $\begin{cases}a_1+a_1q+a_1q^2=7,\\ a_1a_2a_3=8,\end{cases}$ 解得 $a_1=1,q=2$，则 $a_4=8$，故选 D.

3. B 【解析】由随机变量 ξ 等可能地取值可知：$P(1\leqslant X\leqslant 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{1}{2}$，

则 $P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=\frac{1}{6}$，有 $P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=\dots=P(X=n)=\frac{1}{6}$，由 $n\times\frac{1}{6}=1$ 得 $n=6$，故选 B.

4. B 【解析】X 的所有可能取值为 0,1,2，则 $P(X=k)=\frac{C_2^kC_3^{2-k}}{C_6^3}$，$k=0,1,2$.

所以 $P(X=0)=\frac{3}{10}$，$P(X=1)=\frac{3}{5}$，$P(X=2)=\frac{1}{10}$，$E(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{10}=0.8$，故选 B.

另解：服从超几何分布，由公式 $n\times\frac{N}{M}=2\times\frac{2}{5}=0.8$，选 B.

5. C 【解析】设点 M 为 F_1 关于渐近线 $y=-\frac{b}{a}x$ 的对称点，则直线 $y=-\frac{b}{a}x$ 垂直平分线段 MF_1，交点设为 N. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OF_1N$ 中：$|ON|=\frac{1}{2}|MF_2|=\sqrt{3}$，$|F_1N|=b$，则 $b^2+(\sqrt{3})^2=c^2$，而 $\frac{c}{a}=2$，所以 $a=\sqrt{3}$，从而 $b=3$，曲线 $C:\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$，故选 C.

6. B 【解析】先从三个抽屉中选择一个空抽屉 C_3^1，接下来可能将四个小球分为 2+2 两组放入不同编号的抽屉中，也可能将四个小球分为 3+1 两组放入不同编号的抽屉. 因此恰好有 1 个抽屉为空的不同放法有：$C_3^1\left(\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}A_2^2+C_4^3A_2^2\right)=42$ 种.

7. B 【解析】"雹程"为：$10\to5\to16\to8\to4\to2\to1$.

8. C 【解析】由 $M=\frac{3(2-\ln3)}{e^2}=\frac{\ln\frac{e^2}{3}}{\frac{e^2}{3}}$，$N=\ln\sqrt[3]{3}=\frac{\ln3}{3}$，$P=\frac{2-\ln4}{e}=\frac{\ln\frac{e}{2}}{\frac{e}{2}}$，

构造函数 $F(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $M=F(\frac{e^2}{3})$，$N=F(3)$，$P=F(\frac{e}{2})$.

由 $F'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ 可知：当 $0<x<e$ 时，$F'(x)>0$，$F(x)$ 单调递增，

当 $x>\mathrm{e}$ 时，$F'(x)<0$，$F(x)$ 单调递减，当 $x=\mathrm{e}$ 时，$F(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

由 $0<\frac{\mathrm{e}}{2}<\frac{\mathrm{e}^2}{3}<\mathrm{e}$，$F(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 单调递增可知：$P=F(\frac{\mathrm{e}}{2})<M=F(\frac{\mathrm{e}^2}{3})$，即 $P<M$.

由 $3\in(\mathrm{e},+\infty)$ 在单调递减区间，令 $t=\frac{\ln x}{x}$ 有两个解 x_1、x_2，且 $x_1<x_2$，

则 $1<x_1<\mathrm{e}<x_2$，$t\in(0,\frac{1}{\mathrm{e}})$，可得 $t=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}=\frac{\ln x_2+\ln x_1}{x_2+x_1}$①，得 $\frac{1}{x_1+x_2}=\frac{t}{\ln x_1x_2}$②，

令 $g(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$，则 $g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$，当 $x>1$ 时 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x>1$ 时，$g(x)>g(1)=0$，即 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$.

若 $x=\frac{x_2}{x_1}$，即 $\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}>\frac{2}{x_2+x_1}$，结合①②，得 $t>\frac{2t}{\ln(x_1x_2)}$，则有 $x_1x_2>\mathrm{e}^2$.

又 $1<\frac{\mathrm{e}^2}{3}<\mathrm{e}<3$，$\therefore$ 当 $x_1=\frac{\mathrm{e}^2}{3}$ 时，$\frac{\mathrm{e}^2}{3}x_2>\mathrm{e}^2$，故 $x_2>3$，由 $F(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 单调递减知：

$M=F(\frac{\mathrm{e}^2}{3})=F(x_1)=F(x_2)<F(3)=N$，即 $M<N$. 故 $P<M<N$，选 C.

9. CD 【解析】A 错，不符合二项分布，服从超几何分布；B 错，方差可能为 0；C 对，元素个数为 16 个；D 对；故选 CD.

10. BD 【解析】$f'(t)=(48-t)\mathrm{e}^{-t}$，可得 $f(t)$ 在 $[0,48]$ 单调递增，在 $[48,720)$ 单调递减，值域为 $[3,f(48)]$，$f'(100)=-52\mathrm{e}^{-100}$，借助函数的图象可知，$\frac{a+b}{2}>48$，即 $a+b>96$. 故选 BD.

11. BCD 【解析】对 A，$n=1$ 不符合，故 A 错；

对 B，逐项依次运算可得 $a_4=\frac{9}{7}$，B 正确；

对 C，可得 $a_{n+6}=a_n$，且 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=0$，故 C 正确；

对 D，由 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^3}{3n^3}>1$ 得 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^3>3$，因为 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^3$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，$f(2)>3$，$f(3)<3$，所以 $n\leqslant 2$，所以 $a_1<a_2<a_3>a_4>\cdots$，而 $a_3=1$，故 D 正确.

12. ACD 【解析】对 A，取点 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(1,1)$，$C(0,1)$，$P(x,y)$，则 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}$ 表示正方形 $OABC$ 内一点 P 到 4 个顶点距离之和，由三角形三边之间的关系或者向量可得最小值为 $2\sqrt{2}$，故 A 正确；

对 B，取最小值时点 P 为正方形对角线交点，即 $x=y=\frac{1}{2}$，故 B 错误；

对 C，$\sqrt{(1+x)^2+y^2}\sqrt{(1-x)^2+y^2}=\sqrt{2}$，关于原点对称，故 C 正确；

对 D，设 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，$P(x,y)$，因为 $\angle POF_1+\angle POF_2=\pi$，故 $\cos\angle POF_1+\cos\angle POF_2=0$，$\frac{|OP|^2+|OF_1|^2-|PF_1|^2}{2|OP|\cdot|OF_1|}+\frac{|OP|^2+|OF_2|^2-|OF_2|^2}{2|OP|\cdot|OF_2|}=0$.

因为 $|OF_1|=|OF_2|=1$，故 $|PF_1|\cdot|PF_2|=1$，故 $2|OP|^2+2=|PF_1|^2+|PF_2|^2$，

即 $2|OP|^2+2=(|PF_1|-|PF_2|)^2+2|OF_1|\cdot|PF_2|$，所以 $2|OP|^2=(|PF_1|-|PF_2|)^2$.

又 $|PF_1|-|PF_2|\leqslant|F_1F_2|=2$，当且仅当 P,F_1,F_2 共线时取等号.

故 $2|OP|^2=(|PF_1|-|PF_2|)^2\leqslant4$，解得 $|OP|\leqslant\sqrt{2}$，故 D 正确. 故选：ACD.

13. 4 【解析】$\dfrac{a+0}{2}=2$，则 $a=4$.

14. 160 【解析】$T_{r+1}=C_6^r(2x)^{6-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r=2^{6-r}C_6^rx^{6-2r}$，则 $6-2r=0$，

$\therefore r=3$，则常数项为 $T_4=2^3\cdot C_6^3=160$.

15. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 【解析】$2a=6$，$|AF_1|+|AN|=|AF_1|+|AF_2|=6$，$36+c^2=37$，则 $c=1$，$\therefore b^2=a^2-1=8$，所求方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$.

16. $\sqrt{3}-1$ 【解析】以点 A 为原点，AB,AD,AA_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系.

$\because BP=2PE$，$\therefore\dfrac{\sqrt{(x-4)^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}}=2$，解得 $x^2+y^2+z^2=4$，点 P 在以 A 为球心，2 为半径的球面上运动，又 $\because AF\perp$ 平面 FB_1C，$\therefore|PF|_{\min}=AF-2=2\sqrt{3}-2$，则动点 M 到平面 B_1CF 距离的最小值为 $\sqrt{3}-1$.

17. 解：(1)因为 $S_n=2^{n+1}-2$，

当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+1}-2-2^n+2=2^n$， …………………… 2 分

而 $a_1=S_1=2^2-2=2$ 满足上式， …………………… 3 分

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n$. …………………… 4 分

(2)因为 $b_n=n2^n$，所以 $T_n=1\times2^1+2\times2^2+\cdots+n\times2^n$，① …………………… 5 分

$2T_n=1\times2^2+2\times2^3+\cdots+n\times2^{n+1}$，② …………………… 6 分

由①－②得：$-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1}$，…………………… 8 分

所以 $T_n=2+(n-1)\cdot2^{n+1}$. …………………… 10 分

18. 解：(1)直线 $(2+k)x+(1+k)y+k=0$，即 $k(x+y+1)+(2x+y)=0$，…………………… 1 分

联立 $\begin{cases}x+y+1=0,\\2x+y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=-2,\end{cases}$ 所以不论 k 取何值，直线 l 必过定点 $P(1,-2)$. …………… 3 分

圆 C：$x^2+y^2=16$，圆心坐标为 $C(0,0)$，半径 $r=4$，

因为 $|PC|=\sqrt{(1-0)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{5}<4$，所以点 P 在圆 C 内部，

则直线 l 与圆 C 恒有两个交点. …………………… 6 分

(2)直线 l 经过圆 C 内定点 $P(1,-2)$，圆心 $C(0,0)$，

当直线 $l\perp CP$ 时，被圆 C 截得的弦 AB 最短，

此时 $|AB|=2\sqrt{4^2-|PC|^2}=2\sqrt{4^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{11}$， …………………… 7 分

因为 $k_{CP}=\dfrac{-2-0}{1-0}=-2$，所以直线 l 的斜率为 $\dfrac{1}{2}$，又直线 l 过点 $P(1,-2)$，

所以当$|AB|$取得最小值时，直线 l 的方程为 $y+2=\frac{1}{2}(x-1)$，即 $x-2y-5=0$，…………………… 9 分

综上：$|AB|$最小值为 $2\sqrt{11}$，此时直线 l 方程为 $x-2y-5=0$. …………………………………………… 12 分

另解：(1)圆心$(0,0)$到直线 l 的距离 $d=\frac{|k|}{\sqrt{(k+1)^2+(k+2)^2}}=\sqrt{\frac{k^2}{2k^2+6k+5}}$.

$\because \frac{k^2}{2k^2+6k+5}=\frac{1}{\frac{5}{k^2}+\frac{6}{k}+2}=\frac{1}{5\left(\frac{1}{k}+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{1}{5}}\leqslant 5$,

$\therefore d\leqslant\sqrt{5}<4$，∴直线 l 与圆 C 相交，有两个交点. ……………………………………………… 6 分

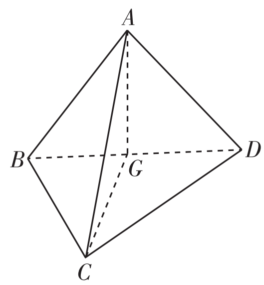
(2)由(1)知，$|AB|=2\sqrt{16-d^2}\geqslant 2\sqrt{16-5}=2\sqrt{11}$,

$\therefore |AB|_{\min}=2\sqrt{11}$，此时$\frac{1}{k}=-\frac{3}{5}$，即 $k=-\frac{5}{3}$.

∴直线 l 的方程为$\left(2-\frac{5}{3}\right)x+\left(1-\frac{5}{3}\right)y-\frac{5}{3}=0$，即 $x-2y-5=0$. ………………………………………… 12 分

19. (1)证明：如图，连接 CG.

因为$\angle BCD=90^\circ$，$BG=DG$，所以 $BG=CG$.



又因为 $AB=AC$，G 为 BD 的中点，所以 $AG\perp BD$，……………………………… 2 分

所以$\angle AGB=\angle AGD=90^\circ$.

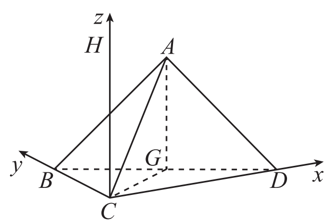
又因为 AG 为公共边，所以$\triangle ABG\cong\triangle ACG$，

所以$\angle AGC=\angle AGB=90^\circ$，所以 $AG\perp CG$，……………………………………… 4 分

又因为 $AG\perp BD$，$BD\cap CG=G$，$CG\subset$平面 BCD，

所以 $AG\perp$平面 BCD. ……………………………………………………………………………………… 5 分

(2)解：过点 C 作直线$CH\perp$平面 BCD，以 C 为坐标原点，$\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CH}$ 的方向分别为x 轴，y 轴，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系. ……………………………………………………………… 6 分



设 $AG=a(a>0)$，则 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},a\right)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,0)$，$D(\sqrt{3},0,0)$，

于是 $\overrightarrow{BA}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},a\right)$，$\overrightarrow{CA}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},a\right)$，$\overrightarrow{CD}=(\sqrt{3},0,0)$. …… 7 分

设平面 ACD 的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+az=0,\\ \sqrt{3}x=0.\end{cases}$

可取 $\vec{n}=(0,2a,-1)$. ………………………………………………………………………………………… 8 分

设直线 AB 与平面 ACD 所成的角为α，

则 $\sin\alpha=|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{BA}\rangle|=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{BA}|}=\frac{2a}{\sqrt{4a^2+1}\cdot\sqrt{a^2+1}}$， ……………………………………………… 9 分

所以，$\sin^2 a=\frac{4a^2}{(4a^2+1)(a^2+1)}=\frac{4a^2}{4a^4+5a^2+1}=\frac{4}{4a^2+\frac{1}{a^2}+5}\leqslant\frac{4}{2\sqrt{4a^2\cdot\frac{1}{a^2}}+5}=\frac{4}{9}$，………… 10 分

当且仅当 $4a^2=\frac{1}{a^2}$，即 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立，此时，直线 AB 与平面 ACD 所成的角 α 最大.

因为 $BD=2$，$BC=1$，$\angle BCD=90°$，所以 $CD=\sqrt{3}$， ………………………………………………… 11 分

此时三棱锥 $A-BCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\times AG=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{12}$.

故当直线 AB 与平面 ACD 所成的角最大时，三棱锥 $A-BCD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{6}}{12}$. ………………… 12 分

另解：(2)过 B 作 $BH\perp$ 平面 ACD 于 H，连接 AH，则 $\angle BAH$ 为直线 AB 和平面 ACD 所成的角.

设 $AG=a$，则由(1)知 $AD=AB=AC=\sqrt{a^2+1}$.

$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{(a^2+1)-\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2+\frac{1}{4}}$.

由 $V_{A-BCD}=V_{B-ACD}$，得 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times a=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{a^2+\frac{1}{4}}\times BH$，

$\therefore BH=\frac{2a}{\sqrt{4a^2+1}}$，于是 $\sin\angle BAH=\frac{BH}{BA}=\frac{2a}{\sqrt{(4a^2+1)(a^2+1)}}$. 下同解法一. ………………… 12 分

20. 解：(1)频率分布直方图中 6 个小矩形的面积分别是 0.1，0.25，0.3，0.2，0.1，0.05.

设该河流 8 月份水位小于 40 米为事件 A_1，水位在 40 米至 50 米为事件 A_2，水位大于 50 米为事件 A_3，则 $P(A_1)=0.1+0.25+0.3=0.65$，$P(A_2)=0.2+0.1=0.3$，$P(A_3)=0.05$. …………… 2 分

设该地发生 1 级灾害为事件 B，

由条形图可知：$P(B|A_1)=0.1$，$P(B|A_2)=0.2$，$P(B|A_3)=0.6$，………………………………………… 4 分

$\therefore P(A_1B)=P(A_1)P(B|A_1)=0.065$，$P(A_2B)=P(A_2)P(B|A_2)=0.06$，

$P(A_3B)=P(A_3)P(B|A_3)=0.03$，

$\therefore P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)=0.155$； ………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)可知 8 月份该河流不发生灾害的概率为 $0.65\times0.9+0.3\times0.75+0.05\times0=0.81$，

发生 1 级灾害的概率为 0.155，发生 2 级灾害的概率为 $1-0.81-0.155=0.035$. …………………… 8 分

设第 i 种方案的企业利润为 $L_i(i=1,2,3)$，

若选择方案一，则该企业在 8 月份的平均利润

$L_1=500\times0.81-100\times0.155-1000\times0.035=354.5$(万元). ………………………………………… 9 分

若选择方案二，则该企业在 8 月份的平均利润

$L_2=500\times0.965-40-1000\times0.035=407.5$(万元). ………………………………………………… 10 分

若选择方案三，则该企业在 8 月份的平均利润

$L_3=500-100=400$(万元). ……………………………………………………………………………… 11 分

由于 $L_2>L_3>L_1$，故企业应选择方案二. ………………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)设 $P(x_p,y_p)$，$Q(x_q,y_q)$，$M(x,y)$，因 M 不同于 F，知 M 不在线段 PQ 上.

设 l_1：$x=my+1$，代入 $y^2=4x$ 得：$y^2-4my-4=0$，则 $y_p+y_q=4m$，$y_py_q=-4$. ……………… 2 分

设 P,Q,F,M 在 y 轴的射影分别是 P'，Q'，F'，M'，则

$\frac{|F'P'|}{|F'Q'|}=\frac{|M'P'|}{|M'Q'|}$，$\left|\frac{y_p}{y_Q}\right|=\left|\frac{y-y_p}{y-y_Q}\right|$，由于 y_p，y_q 异号，M 不在线段 PQ 上，则 $y-y_p$，$y-y_Q$ 同号，

所以$\frac{y_p}{y_Q}=-\frac{y-y_p}{y-y_Q}$,即$(y_p+y_q)y=2y_py_q$, …… 4 分

$\therefore my=-2$,而$x=my+1$,$\therefore x=-1(y\neq 0)$,$\therefore M$点的轨迹方程$x=-1(y\neq 0)$. …… 6 分

(2)设$C(x_0,y_0)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

$\therefore k_{CA}=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}=\frac{x_0^2-x_1^2}{x_0-x_1}=x_0+x_1$,直线$CA$:$y=(x_0+x_1)x-x_0x_1$.

联立$\begin{cases}y=(x_0+x_1)x-x_0x_1,\\ y^2=4x,\end{cases}$化简可得:$(x_0+x_1)y^2-4y-4x_0x_1=0$. …… 7 分

又直线CA与抛物线Γ_1相切,

$\therefore \Delta=4^2+16x_0x_1(x_0+x_1)=0$,即$x_0x_1^2+x_0^2x_1+1=0$②, …… 8 分

同理,直线CB与抛物线Γ_1相切,可得$x_0x_2^2+x_0^2x_2+1=0$③,

由方程②③可得,x_1,x_2为方程$x_0x^2+x_0^2x+1=0$的两根, …… 9 分

$\therefore x_1+x_2=-x_0$,$x_1x_2=\frac{1}{x_0}$. …… 10 分

又$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,故直线AB:$y=(x_1+x_2)x-x_1x_2$,

联立$\begin{cases}y=(x_1+x_2)x-x_1x_2,\\ y^2=4x,\end{cases}$化简得:$(x_1+x_2)y^2-4y-4x_1x_2=0$. …… 11 分

$\because \Delta=4^2+16x_1x_2(x_1+x_2)=16+16\frac{1}{x_0}\cdot(-x_0)=0$,

$\therefore$直线AB与抛物线Γ_1相切,故得证. …… 12 分

22. (1)证明:因为$f'(x)=2\cos x-\frac{1}{1+x}$, …… 1 分

所以当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时$f'(x)<0$恒成立,函数在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$无极值. …… 2 分

当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,$f''(x)=-2\sin x+\frac{1}{(1+x)^2}$单调递减, …… 3 分

因为$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$f''(0)=1>0$,$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2+\frac{1}{\left(1+\frac{\pi}{2}\right)^2}<0$,

所以存在唯一的$x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,使得$f''(x_0)=0$,且当$0<x<x_0$时,$f''(x)>0$;当$x_0<x<\frac{\pi}{2}$时,$f''(x)<0$.

所以$f'(x)$在$(0,x_0)$内单调递增,在$\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$内单调递减. …… 4 分

又$f'(x_0)>f'(0)=1>0$,$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{1+\frac{\pi}{2}}<0$,

所以存在唯一的$\alpha\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$,使得$f'(\alpha)=0$,且当

$0<x<\alpha$,$f'(x)>0$;$\alpha<x<\frac{\pi}{2}$,$f'(x)<0$,

所以 $f(x)$ 存在唯一的极大值点 α，且 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. ………………………………………………………… 5 分

而函数 $f(x)=2\sin x-\ln(1+x)$ 满足 $f(\alpha)>f(0)=0$，$f(\pi)=-\ln(1+\pi)<0$，

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2-\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)>0$，

所以 $f(x)$ 存在唯一的零点 β，且 $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ ………………………………………………………… 6 分

(2) $2\alpha>\beta$，证明如下：

因为 $f(x)$ 在区间 (α,π) 内单调递减，故只需证明 $f(2\alpha)<f(\beta)$，即证 $f(2\alpha)<0$. ……………… 7 分

由 $f'(\alpha)=0$，得 $2\cos\alpha-\frac{1}{1+\alpha}=0$. ………………………………………………………… 8 分

$f(2\alpha)=2\sin(2\alpha)-\ln(1+2\alpha)=2\sin\alpha\,\frac{1}{1+\alpha}-\ln(1+2\alpha)$. ……………………………………… 10 分

$=\frac{1}{1+\alpha}[2\sin\alpha-(1+\alpha)\ln(1+2\alpha)]$.

设函数 $\varphi(\alpha)=2\sin\alpha-(1+\alpha)\ln(1+2\alpha)$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，

则 $\varphi'(\alpha)=2\cos\alpha-\ln(1+2\alpha)-\frac{2(1+\alpha)}{1+2\alpha}=2\cos\alpha-\ln(1+2\alpha)-\frac{1}{1+2\alpha}-1$. …………………… 11 分

因为 $\varphi''(\alpha)=-2\sin\alpha-\frac{2}{1+2\alpha}+\frac{2}{(1+2\alpha)^2}=-2\sin\alpha-\frac{4\alpha}{(1+2\alpha)^2}<0$，

所以 $\varphi'(\alpha)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减，$\varphi'(0)=0$，所以 $\varphi'(\alpha)<0$，

所以 $\varphi(\alpha)=2\sin\alpha-(1+\alpha)\ln(1+2\alpha)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减.

因为 $\varphi(0)=0$，所以 $\varphi(\alpha)<0$，从而 $f(2\alpha)<0$，得证. ………………………………………………… 12 分