数学答案

一、单选题

1．D　2．B　3．C　4．C　5．B　6．B　7．D　8．B

8.由题知，定义在R上的函数$f\left(x\right)$满足，$f\left(x_1+x_2\right)=f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)$，

且当$x>0$时，$f\left(x\right)>0$，$f\left(1\right)=1$，

所以$f\left(0+0\right)=f\left(0\right)+f\left(0\right)$，即$f\left(0\right)=0$，

又$f\left(x\right)+f\left(-x\right)=f\left(x-x\right)=f(0)=0$，

所以$f\left(x\right)$为R上的奇函数，

设$x_1<x_2$，　$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=f\left(x_1\right)-f\left(x_1+x_2-x_1\right)=-f\left(x_2-x_1\right)<0$，

所以$f\left(x\right)$为R上的增函数，

因为$2^{1+f(x)}+2^{1-f(x)}+2f\left(x^2\right)\leq 7\Leftrightarrow 2^{f(x)}+2^{-f(x)}+f\left(x^2\right)\leq\frac{7}{2}$，

令$g\left(x\right)=2^{f(x)}+2^{-f(x)}+f\left(x^2\right)$，

因为$g\left(x\right)=2^{f(x)}+2^{-f(x)}+f\left(x^2\right)$为R上的偶函数，且在$\left[0,+\infty\right)$上单调递增，$g\left(1\right)=\frac{7}{2}$，

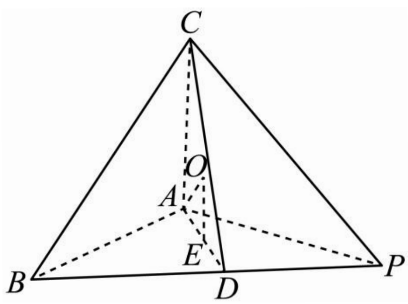
所以$g\left(x\right)\leq g\left(1\right)$，

所以$-1\leq x\leq 1$，

二、多选题

9．BC　10．ACD　11．ABD　12．BCD

12.D选项：如图所示，



由 $PA=AC=2\sqrt{3}$， $CP=2\sqrt{6}$，则 $PA^2+AC^2=CP^2$，得 $PA\perp AC$，

由 D 是 PB 的中点， $PA=AB=PB=2\sqrt{3}$，易知：$\triangle PAB$ 为等边三角形且 $AD=3$，

又 $CD=\sqrt{21}$，所以 $CA^2+AD^2=CD^2$，得 $CA\perp AD$，

又 $AD\cap AP=A$， $AP,AD\subset$ 平面 PAB，所以 $AC\perp$ 平面 PAB.

设球心为 O 且在过 $\triangle PAB$ 中心垂直于面 PAB 的垂线上，点 O 到底面 PAB 的距离为

$d=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}$，

由正弦定理得 $\triangle PAB$ 的外接圆半径 $r=\frac{PA}{2\sin 60^{\circ}}=\frac{2\sqrt{3}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$，

球 O 的半径 $OA=R=\sqrt{d^2+r^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{7}$，

所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球 O 的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{7}\right)^3=\frac{28\sqrt{7}\pi}{3}$.故 D 正确.

三、填空题

13．10.8　　14．240　15．9　16．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

16.设直线 BD 的方程为 $y=kx+m(k\neq 0),B\left(x_1,y_1\right)$， $D\left(x_2,y_2\right)$，

则 $A\left(-x_1,-y_1\right),E\left(0,m\right)$，

由 $\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$， 得 $\left(b^2+a^2k^2\right)x^2+2kma^2x+a^2m^2-a^2b^2=0$，

显然存在 k,m， 使得 $\Delta>0$，

故由韦达定理得 $x_1+x_2=-\frac{2kma^2}{b^2+a^2k^2},y_1+y_2=-\frac{2k^2ma^2}{b^2+a^2k^2}+2m$，

因为 $\overline{OB}\cdot\overline{OE}=2\left|\overline{OE}\right|^2$， 则 $y_1m=2m^2$， 即 $y_1=2m$，

则 $x_1=\frac{m}{k},B\left(\frac{m}{k},2m\right),k_{AB}=\frac{y_1}{x_1}=2k,y_2=-\frac{2k^2ma^2}{b^2+a^2k^2}$，

因为 $AB\perp AD$，

所以 $k_{AD}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{1}{2k}$， 即 $-\frac{2k^2ma^2}{b^2+a^2k^2}+2m=-\frac{1}{2k}\left(-\frac{2kma^2}{b^2+a^2k^2}\right)$，

即 $-2k^2a^2+2b^2+2k^2a^2=a^2$， 化简得 $a^2=2b^2$，

所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

四、解答题

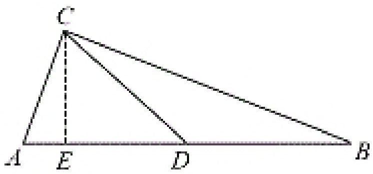
17.（1）由正弦定理知，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

∵$a\cos B-b\cos A=\frac{3}{5}c$，

∴$\sin A\cos B-\sin B\cos A=\frac{3}{5}\sin C=\frac{3}{5}\sin(A+B)=\frac{3}{5}(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$，

化简得，$\frac{2}{5}\sin A\cos B=\frac{8}{5}\cos A\sin B$，

∴$\tan A=4\tan B$，即$\frac{\tan A}{\tan B}=4$． ……………………………………………………5 分



（2）作 $CE\perp AB$ 于 E，

∵$\tan A=\frac{CE}{AE}$，$\tan B=\frac{CE}{BE}$，∴$\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{BE}{AE}=4$，即 $BE=4AE$，

∵点 D 为边 AB 的中点，且 $AB=10$，

∴$BD=AD=5$，$AE=2$，$DE=3$，

在 Rt△CDE 中，$CE=\sqrt{CD^2-DE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

在 Rt△BCE 中，$BE=BD+DE=8$，∴$BC=\sqrt{BE^2+CE^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$.

……………………………………………………………………………10 分

18.(1)∵$2S_{n+1}+S_n=2$，∴$2S_n+S_{n-1}=2\ (n\geq 2)$，

两式相减得$2a_{n+1}+a_n=0\ (n\geq 2)$.∴$a_{n+1}=-\frac{a_n}{2}$，

又$a_1=1$，$2(a_1+a_2)+a_1=2$，解得$a_2=-\frac{1}{2}$，

∴$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

则$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ……………………………………………………5 分

(2)$\because b_n=|a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{n+1}|==\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdots \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right|=\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right|=2^{-\frac{n(n+1)}{2}}$,

$\therefore c_n=\log_2 b_n=-\frac{n(n+1)}{2}$,

$\frac{1}{c_n}=-\frac{2}{n(n+1)}=-2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

$T_n=-2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=-2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=-\frac{2n}{n+1}$

……………………………………………………………………12 分

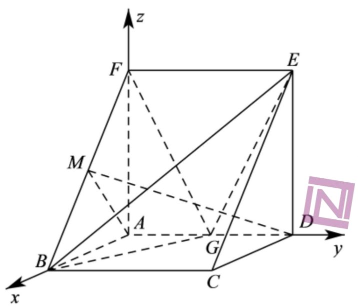
19.（1）取 BE 中点 N，则 MN 平行且等于 $\frac{1}{2}FE$，AG 也平行且等于 $\frac{1}{2}FE$，

MN平行且等于AG，四边形 $AMNG$ 为平行四边形，$AM \,/\!/\, GN$，

又 $AM \not\subset$ 平面BEG $GN \subset$ 平面BEG，所以 AM // 平面

BEG；……………………………………………………………………5 分

(2)由已知易证 $AF \perp AD, AF \perp AB, AB \perp AD$ 建立以 A 为原点，以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴正方向的空间直角坐标系，



则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$E(0,2,2)$，$F(0,0,2)$，$G(0,1,0)$，$M(1,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{BE}=(-2,2,2),\overrightarrow{BG}=(-2,1,0)$，

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为面 BEG 的法向量，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=-2x+2y+2z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BG}=-2x+y=0\end{cases}$，令 $z=1$，可得

$\vec{n}=(-1,-2,1)$，

同理可求平面 BFG 的法向量为 $\overrightarrow{m}=(1,2,1)$，

$$\cos<\vec{n},\vec{m}>=\frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\frac{1\times1+2\times2+1\times(-1)}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{2}{3}$$ ………………………………12 分

20. (1)由题意可知，方案一中管理软件服务公司的月收费 y 与 x 的函数关系式为 $y=200x+4\,800$，$x\in\mathbf{N}$.

方案二中管理软件服务公司的月收费 y 与 x 的函数关系式为 $y=\begin{cases}7\,600, & x\leqslant 15, x\in\mathbf{N},\\ 500x+100, & x>15, x\in\mathbf{N}.\end{cases}$

………………………………………………………………………4 分

(2)记选择的 3 个月恰好是 1 个 13 次服务、2 个 14 次服务为事件 A，则 $P(A)=\frac{C_2^1C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$.

………………………………………………………………………8 分

(3)对于方案一，设管理软件服务公司的月收费为 ξ_1 元，

由条形统计图可得 ξ_1 的取值为 7 400，7 600，7 800，8 000，8 200，

$P(\xi_1=7\,400)=0.1$，$P(\xi_1=7\,600)=0.4$，$P(\xi_1=7\,800)=0.1$，

$P(\xi_1=8\,000)=0.2$，$P(\xi_1=8\,200)=0.2$，

所以 ξ_1 的分布列为：

ξ_1	7 400	7 600	7 800	8 000	8 200
P	0.1	0.4	0.1	0.2	0.2

所以 $E(\xi_1)=7\,400\times0.1+7\,600\times0.4+7\,800\times0.1+8\,000\times0.2+8\,200\times0.2=7\,800$.

对于方案二，设管理软件服务公司的月收费为 ξ_2 元，由条形统计图可得 ξ_2 的取值为 7 600，8 100，8 600.

$P(\xi_2=7\,600)=0.6$，$P(\xi_2=8\,100)=0.2$，$P(\xi_2=8\,600)=0.2$，

所以 ξ_2 的分列布为：

ξ_2	7 600	8 100	8 600
P	0.6	0.2	0.2

$E(\xi_2)=7\,600\times0.6+8\,100\times0.2+8\,600\times0.2=7\,900$.

因为 $E(\xi_1)<E(\xi_2)$，所以从节约成本的角度考虑，该工厂选择方案一较合适.

……………………………………………………………………12 分

21.（1）由题可得 $\begin{cases}\frac{b}{a}=\sqrt{3}\\ \frac{|\sqrt{3}c|}{2}=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=2\\ a=1\\ b=\sqrt{3}\end{cases}$，$E$ 的方程：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$.……………………4 分

(2)由已知直线l的斜率存在，设l：$y=kx+m$，

l与圆O：$x^2+y^2=1$相切，则$d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1\Rightarrow m^2=1+k^2$，

联立双曲线 E与直线 l的方程：$\begin{cases}3x^2-y^2-3=0,\\ y=kx+m\end{cases}\Rightarrow\left(3-k^2\right)x^2-2mkx-m^2-3=0,$

设直线l与双曲线E的左右两支交于$P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$两点，

所以$\begin{cases}3-k^2\neq 0\\ \Delta=4k^2m^2+4\left(m^2+3\right)\left(3-k^2\right)>0\\ x_1x_2=-\dfrac{m^2+3}{3-k^2}<0\end{cases}$，可得$0\le k^2<3$，

所以$x_1+x_2=\dfrac{2mk}{3-k^2},x_1x_2=-\dfrac{m^2+3}{3-k^2}$ ，

又$A(1,0),P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，以$P$，$Q$为直径的圆经过双曲线的右顶点A，

所以$AP\perp AQ$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$，

又$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)+y_1y_2=\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)+\left(kx_1+m\right)\left(kx_2+m\right)$

$=\left(1+k^2\right)x_1x_2+\left(mk-1\right)\left(x_1+x_2\right)+m^2+1=0$，

即$-\dfrac{\left(1+k^2\right)\left(m^2+3\right)}{3-k^2}+\dfrac{2mk\left(mk-1\right)}{3-k^2}+m^2+1=0\Rightarrow m^2-mk-2k^2=0$

$\Rightarrow\left(m-2k\right)\left(m+k\right)=0\Rightarrow m=2k$ 或 $m=-k$，

①当$m=-k$时，点M与右顶点A重合，不合题意舍去；

②当$m=2k$时，代入$m^2=1+k^2$，得$k^2=\dfrac{1}{3}$，$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，满足条件，

所以直线l的方程为$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$或$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

……………………………………………………………………12 分

22.（1）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

$\because f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

$\therefore f'(x)=2x-m+\dfrac{2}{x}\geq 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，即 $m\leq 2x+\dfrac{2}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

又 $2x+\dfrac{2}{x}\geq 2\sqrt{2x\cdot\dfrac{2}{x}}=4$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，

$\therefore m\leq 4$；……………………………………………………………………………4 分

（2）由题意 $f'(x)=2x-m+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-mx+2}{x}$，

$\because f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2，

$\therefore x_1,x_2$ 为方程 $2x^2-mx+2=0$ 的两个不相等的实数根，

由韦达定理得 $x_1+x_2=\dfrac{m}{2}$，$x_1\cdot x_2=1$，

$\because 0<x_1<x_2$，$\therefore 0<x_1<1<x_2$，

又 $m=2(x_1+x_2)=2(x_1+\dfrac{1}{x_1})\in(4,5)$，解得 $\dfrac{1}{2}<x_1<1$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1{}^2-mx_1+2\ln x_1\right)-\left(x_2{}^2-mx_2+2\ln x_2\right)$

$=\left(x_1{}^2-x_2{}^2\right)+2\left(\ln x_1-\ln x_2\right)-2\left(x_1+x_2\right)\left(x_1-x_2\right)=\left(x_2{}^2-x_1{}^2\right)+2\left(\ln x_1-\ln x_2\right)$

$=\dfrac{1}{x_1{}^2}-x_1{}^2+4\ln x_1$，

设 $g(x)=\dfrac{1}{x^2}-x^2+4\ln x$（$\dfrac{1}{2}<x<1$），

则 $g'(x)=\dfrac{-2}{x^3}-2x+\dfrac{4}{x}=\dfrac{-2(x^4-2x^2+1)}{x^3}=\dfrac{-2(x^2-1)^2}{x^3}<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上为减函数，

又 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=4-\dfrac{1}{4}+4\ln\dfrac{1}{2}=\dfrac{15}{4}-4\ln 2$，$g(1)=1-1+0=0$，

$\therefore 0<g(x)<\dfrac{15}{4}-4\ln 2$，

即 $f(x_1)-f(x_2)$ 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{15}{4}-4\ln 2\right)$……………………………………………12 分