天一大联考

2022—2023 学年(上)高二年级期中考试

数学(A卷)答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. **答案** B

命题意图 本题考查椭圆的基本性质.

解析 由椭圆方程可知其焦点在 y 轴上,半焦距为 $\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$,所以焦点坐标为$(0,\pm\sqrt{2})$.

2. **答案** C

命题意图 本题考查向量的数量积.

解析 $\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x+4=6$,$\therefore x=2$,$\therefore \boldsymbol{b}=(2,2,2)$,$\therefore \cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{6}{\sqrt{5}\times\sqrt{12}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

3. **答案** B

命题意图 本题考查直线的方程与性质.

解析 $kx-2y-4k+1=0$ 可化为 $k(x-4)-2\left(y-\dfrac{1}{2}\right)=0$,$\therefore$ 直线过定点$\left(4,\dfrac{1}{2}\right)$.

4. **答案** D

命题意图 本题考查空间向量的坐标运算.

解析 向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,-1,3)$,由题可知存在实数 k 使得 $\boldsymbol{c}=k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,化为坐标形式为$(-1,2m,-3)=(k,-k,3k)$,$\therefore \begin{cases}-1=k,\\2m=-k,\\-3=3k,\end{cases}$解得 $m=\dfrac{1}{2}$.

5. **答案** B

命题意图 本题考查椭圆与直线的位置关系.

解析 解方程组 $\begin{cases}x^2+\dfrac{y^2}{2}=1,\\y=x,\end{cases}$ 得 $\dfrac{3x^2}{2}=1$,所以 $x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,得 $y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.故截得的线段长为 $\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

6. **答案** C

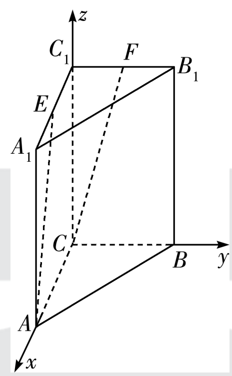
命题意图 本题考查直线的性质.

解析 由两直线垂直得 $m\cdot 1+5\times(-3)=0$,解得 $m=15$,所以直线 $mx+5y-3=0$ 即 $15x+5y-3=0$. 又因为垂足$(p,1)$同时满足两直线方程,代入得 $\begin{cases}15\times p+5-3=0,\\p-3+n=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=-\dfrac{2}{15},\\n=\dfrac{47}{15},\end{cases}$ 所以 $m+n+p=15+\dfrac{47}{15}+\left(-\dfrac{2}{15}\right)=18$.

7. **答案**　B

命题意图　本题考查利用空间向量计算异面直线所成的角.

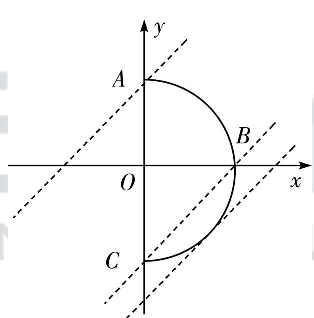
解析　以点 C 为坐标原点,CA,CB,CC_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系. 由题意可知 $A(1,0,0)$,$C(0,0,0)$,$E\left(\frac{1}{2},0,2\right)$,$F\left(0,\frac{1}{2},2\right)$,所以 $\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{1}{2},0,2\right)$,$\overrightarrow{CF}=\left(0,\frac{1}{2},2\right)$,则 $\cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{CF}\rangle=\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{CF}|}=\frac{16}{17}$. 因此,异面直线 AE 与 CF 所成角的余弦值为$\frac{16}{17}$.



8. **答案**　A

命题意图　本题考查直线与圆的位置关系.

解析　曲线 $C:x=\sqrt{2-y^2}$,即 $x^2+y^2=2(x\geqslant 0)$,表示半个圆. 如图,设 $A(0,\sqrt{2})$,$B(\sqrt{2},0)$,$C(0,-\sqrt{2})$,当 l 经过点 A 时,$\sqrt{2}=0+b$,求得 $b=\sqrt{2}$,当 l 经过点 C 时,$-\sqrt{2}=0+b$,求得 $b=-\sqrt{2}$. 当 l 与 y 轴的交点在 A,C 之间(包含 A 点,不包含 C 点),即 $-\sqrt{2}<b\leqslant\sqrt{2}$时,$l$ 与 C 仅有一个交点. 当 l 和 C 相切时,由圆心到直线 l 的距离等于半径,可得$\sqrt{2}=\frac{|b|}{\sqrt{2}}$,求得 $b=-2$ 或 $b=2$(舍去),即 $b=-2$ 时,只有一个公共点,符合题意. 综上得,实数 b 的取值范围是$(-\sqrt{2},\sqrt{2}]\cup\{-2\}$.



9. **答案**　D

命题意图　本题考查距离公式以及圆的方程.

解析　设点 $P(x,y)$,由$\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,得$\frac{\sqrt{(x+2)^2+y^2}}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,化简得 $x^2+y^2+12x+4=0$,即$(x+6)^2+y^2=32$.

10. **答案**　D

命题意图　本题考查利用空间向量计算距离.

解析　设正四棱柱的高为 h,由其外接球的表面积为 17π,可知外接球半径为$\frac{\sqrt{17}}{2}$,所以 $\sqrt{2^2+2^2+h^2}=\sqrt{17}$,

得 $h=3$. 以 D 为坐标原点,$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$的方向分别为 x,y,z 轴的正方向建立空间直角坐标系,则 $A(2,0,0)$,$B_1(2,2,3)$,$M(1,2,0)$,$D_1(0,0,3)$,所以$\overrightarrow{AB_1}=(0,2,3)$,$\overrightarrow{AM}=(-1,2,0)$,$\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,3)$. 设平面 AB_1M 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}2y+3z=0,\\-x+2y=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(6,3,-2)$,则点 D_1 到平面 AB_1M 的距离为$\dfrac{|\overrightarrow{AD_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{18}{7}$.

11. **答案** C

命题意图 本题考查圆与圆的位置关系.

解析 圆 C 的方程化为$(x+4)^2+(y+3)^2=9$,圆心为 $C(-4,-3)$,半径为 3. 由已知得$|OA|=r$,$|CA|=3$,$|OC|=5$,因为 $S_{四边形OACB}=2S_{\triangle OAC}$,所以 $S_{\triangle OAC}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot r\sin\angle OAC=\dfrac{3r}{2}$,所以 $\sin\angle OAC=1$,即 $OA\perp CA$,所以 $r^2+3^2=5^2$,所以 $r=4$,圆 O 的方程为 $x^2+y^2=16$. 两个圆的方程作差,得 $4x+3y+16=0$,此方程即直线 AB 的方程. 原点 O 到直线 $4x+3y+16=0$ 的距离为$\dfrac{16}{5}$,所以$|AB|=2\sqrt{16-\left(\dfrac{16}{5}\right)^2}=\dfrac{24}{5}$.

12. **答案** A

命题意图 本题考查椭圆的性质.

解析 设椭圆的右焦点为 F',焦距为 $2c$. 连接 PF',QF'. 根据椭圆对称性可知四边形 $PFQF'$ 为平行四边形,则$|QF|=|PF'|$,且由$\angle PFQ=60°$,可得$\angle FPF'=120°$,所以$|PF|+|PF'|=5|PF'|=2a$,则$|PF'|=\dfrac{2}{5}a$,$|PF|=\dfrac{8}{5}a$. 由余弦定理可得$(2c)^2=|PF|^2+|PF'|^2-2|PF|\cdot|PF'|\cos 120°=\dfrac{64}{25}a^2+\dfrac{4}{25}a^2-2\times\dfrac{8}{5}a\cdot\dfrac{2}{5}a\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$,所以 $c^2=\dfrac{21}{25}a^2$,所以椭圆的离心率 $e=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{21}{25}}=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案** $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

命题意图 本题考查直线与直线平行的性质.

解析 $\because$ 直线 l_1 与 l_2 平行,$\therefore \dfrac{3}{18}=\dfrac{-a}{-9}\neq\dfrac{-4}{2a}$,解得 $a=\dfrac{3}{2}$,$\therefore$ 直线 $l_1:6x-3y-8=0$,直线 $l_2:6x-3y+1=0$,$\therefore$ 直线 l_1 与 l_2 之间的距离 $d=\dfrac{|-8-1|}{\sqrt{6^2+(-3)^2}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

14. **答案** $4(\sqrt{2}-1)$

命题意图 本题考查圆与圆的位置关系.

解析 设圆 C 的半径为 r,则$|CA|=|CE|=|CF|=r$,易知四边形 $OECF$ 为正方形,所以$|OC|=\sqrt{2}r$,所以$|OA|=(\sqrt{2}+1)r=4$,所以 $r=\dfrac{4}{1+\sqrt{2}}=4(\sqrt{2}-1)$.

15. **答案** $3\sqrt{5}$

命题意图 本题考查圆的性质.

解析 因为直线 $m(x-2)+n(y+2)=0$ 过定点 $A(2,-2)$,且 $PM\perp AM$,所以 M 的轨迹是以 PA 为直径的圆,且圆心为 $C(3,0)$,半径 $R=\dfrac{|PA|}{2}=\dfrac{\sqrt{(2-4)^2+(-2-2)^2}}{2}=\sqrt{5}$,所以$|MN|_{\max}=|CN|+R=\sqrt{(5-3)^2+4^2}+$

$\sqrt{5}=3\sqrt{5}$.

16. **答案** $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$

命题意图 本题考查椭圆的方程与性质.

解析 设 C 的半焦距为 $c(c>0)$，由题可知 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则 $a^2=2c^2=2b^2$. 设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，由已知得

$$\begin{cases} m^2+n^2-2mn\cos 60^\circ=(2c)^2, \\ m+n=2a, \\ \dfrac{1}{2}mn\sin 60^\circ=\sqrt{3}, \end{cases}$$ 解得 $\begin{cases} a^2=6, \\ b^2=3, \end{cases}$ 所以椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查直线的方程，直线与圆的位置关系.

解析 (Ⅰ)由已知得 l 的斜率为 $k=-\dfrac{3}{4}$，所以 m 的斜率为 $k'=-\dfrac{3}{4}$， ……………………（2 分）

又 m 过点 $N(0,-1)$，由点斜式方程可知 m 的方程为 $y=-\dfrac{3}{4}x-1$，即 $3x+4y+4=0$. ……………（5 分）

(Ⅱ)因为 m 与圆 C 相交，圆心 $C(1,0)$ 到 m 的距离为 $d=\dfrac{|3+4|}{5}=\dfrac{7}{5}$，……………（7 分）

圆 C 的半径为 $r=\sqrt{3}$，

所以 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3-\dfrac{49}{25}}=\dfrac{2\sqrt{26}}{5}$. ……………………（10 分）

18. **命题意图** 本题考查空间向量的性质以及相关运算.

解析 (Ⅰ)$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}$， ……………………（2 分）

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1N}=\overrightarrow{AA_1}+\dfrac{3}{4}(\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_1D_1})=\boldsymbol{c}+\dfrac{3}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\dfrac{3}{4}\boldsymbol{a}+\dfrac{3}{4}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$. ……………（6 分）

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AN}=\dfrac{3}{4}\boldsymbol{a}+\dfrac{3}{4}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，

得 $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=-\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{4}\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}$. ……………………（8 分）

所以 $|\overrightarrow{NM}|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{4}\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{16}\boldsymbol{a}^2+\dfrac{1}{16}\boldsymbol{b}^2+\dfrac{1}{4}\boldsymbol{c}^2+\dfrac{1}{8}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\dfrac{1}{4}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}$. ………（10 分）

由条件得 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=4$，$\boldsymbol{c}^2=16$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times 2\cos 60^\circ=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=2\times 4\cos 60^\circ=4$，

所以 $|\overrightarrow{NM}|=\sqrt{\dfrac{1}{16}\times 4+\dfrac{1}{16}\times 4+\dfrac{1}{4}\times 16+\dfrac{1}{8}\times 2+\dfrac{1}{4}\times 4+\dfrac{1}{4}\times 4}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. ……………（12 分）

19. **命题意图** 本题考查椭圆的方程和性质.

解析 (Ⅰ)设 C 的焦距为 $2c(c>0)$，则 $2a=10$，$2c=6$， ……………………（2 分）

所以 $a=5$，$c=3$，所以 $b^2=a^2-c^2=16$，

所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. ……………………（4 分）

(Ⅱ)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，代入椭圆方程得 $\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{25}+\dfrac{y_1^2}{16}=1, \\ \dfrac{x_2^2}{25}+\dfrac{y_2^2}{16}=1, \end{cases}$ ……………………（5 分）

两式相减可得$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{25}=-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{16}$，即$\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}=-\frac{16}{25}$. ………………（7 分）

由点$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)$为线段 AB 的中点，得 $x_1+x_2=\frac{1}{2}$，$y_1+y_2=\frac{2}{5}$，………………（8 分）

则 l 的斜率 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{16}{25}\times\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=-\frac{16}{25}\times\frac{5}{4}=-\frac{4}{5}$，………………（10 分）

所以 l 的方程为 $y-\frac{1}{5}=-\frac{4}{5}\left(x-\frac{1}{4}\right)$，即 $4x+5y-2=0$. ………………（12 分）

20. **命题意图** 本题考查圆的方程，直线与圆的位置关系.

解析 （Ⅰ）设圆 C 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$，

则$\begin{cases}2+D+E+F=0,\\4-2E+F=0,\\4+2D+F=0,\end{cases}$ ………………（3 分）

解得$\begin{cases}D=-1,\\E=1,\\F=-2,\end{cases}$ ………………（5 分）

故圆 C 的方程为 $x^2+y^2-x+y-2=0$，即$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$. ………………（6 分）

（Ⅱ）依题意，圆 C 的圆心为 $C\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，半径为$\frac{\sqrt{10}}{2}$.

在四边形 $MANC$ 中，CA 为$\angle MAN$ 的平分线，由$\angle MAN=60°$，得$\angle MAC=30°$， ………………（7 分）

又 $CM\perp AM$，所以$|CA|=2\times\frac{\sqrt{10}}{2}=\sqrt{10}$. ………………（8 分）

由点 A 在直线 $y=\frac{1}{2}$上，设点 A 的坐标为$\left(x,\frac{1}{2}\right)$，

则$|CA|=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{10}$， ………………（10 分）

解得 $x=\frac{7}{2}$或$-\frac{5}{2}$，所以点 A 的坐标为$\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$或$\left(-\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$. ………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查空间向量在立体几何中的应用.

解析 （Ⅰ）因为平面 $PAD\perp$底面 $ABCD$，平面 $PCD\perp$底面 $ABCD$，易得 $PD\perp$底面 $ABCD$，又底面 $ABCD$ 为矩形，所以棱 DA,DC,DP 两两互相垂直. 以点 D 为坐标原点，以 DA,DC,DP 所在直线为 x,y,z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系， ………………（1 分）

则 $B(2\sqrt{2},2,0)$，$P(0,0,4)$，$A(2\sqrt{2},0,0)$，$M(\sqrt{2},2,0)$. ………………（2 分）

可得$\overrightarrow{PB}=(2\sqrt{2},2,-4)$，$\overrightarrow{AM}=(-\sqrt{2},2,0)$. ………………（3 分）

因为$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AM}=2\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})+4-0=0$，所以 $PB\perp AM$. ………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得$\overrightarrow{AM}=(-\sqrt{2},2,0)$，$\overrightarrow{AP}=(-2\sqrt{2},0,4)$. ………………（6 分）

设平面 PAM 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

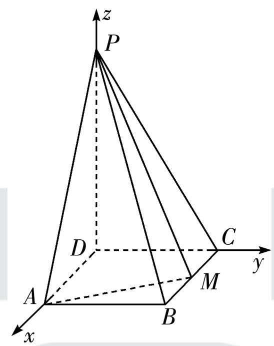
则由$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AM}=0,\\\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-\sqrt{2}x+2y=0,\\-2\sqrt{2}x+4z=0,\end{cases}$

令 $z=\sqrt{2}$，解得 $\boldsymbol{n}_1=(2,\sqrt{2},\sqrt{2})$. ………………………………………………………………………………（8 分）

易知平面 PAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,0)$. ………………………………………………………………（9 分）

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}\times 1}=\dfrac{1}{2}$. ………………………………………………………（11 分）

所以平面 PAD 与平面 PAM 夹角的正弦值为$\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………（12 分）



22. **命题意图** 本题考查椭圆的方程与性质.

解析 （Ⅰ）设 C 的右焦点为$(c,0)$，$c>0$，

因为右焦点到直线$\sqrt{2}x+y+2=0$ 的距离为 $2\sqrt{3}$，

所以$\dfrac{|\sqrt{2}c+2|}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$，解得 $c=2\sqrt{2}$. ……………………………………………………………………………（2 分）

因为离心率为$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $a=\dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=2\sqrt{3}$， …………………………………………………………………（3 分）

所以 $b^2=a^2-c^2=4$， ……………………………………………………………………………………………（4 分）

所以 C 的方程为$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$. ………………………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $A(0,2)$.

当 $k=0$ 时，易知存在直线 l 满足题意.

当 $k\neq 0$ 时，假设存在直线 $l:y=kx+m(k\neq 0)$ 符合题意.

与椭圆方程联立得$\begin{cases}\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$消去 y 得$(3k^2+1)x^2+6mkx+3m^2-12=0$. ………………（6 分）

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则有$\begin{cases}\Delta=36m^2k^2-4(1+3k^2)(3m^2-12)=12(12k^2-m^2+4)>0,\\ x_1+x_2=-\dfrac{6mk}{1+3k^2},\\ x_1x_2=\dfrac{3m^2-12}{1+3k^2},\end{cases}$ …………（7 分）

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=k\left(-\dfrac{6mk}{1+3k^2}\right)+2m=\dfrac{2m}{1+3k^2}$，

所以 MN 的中点 P 的坐标为$\left(-\dfrac{3mk}{1+3k^2},\dfrac{m}{1+3k^2}\right)$. ………………………………………………………（8 分）

因为$|AN|=|AM|$,所以AP是线段MN的垂直平分线,所以$AP\perp MN$,显然此时$m\neq0$.

所以$k_{AP}=\dfrac{\dfrac{m}{1+3k^2}-2}{-\dfrac{3mk}{1+3k^2}}=-\dfrac{m-2-6k^2}{3mk}=-\dfrac{1}{k}$, …………………………………………………………………………… (9 分)

所以$m=-1-3k^2$. …… (10 分)

将其代入$\Delta=12(12k^2-m^2+4)>0$,并整理得$(k^2-1)(9k^2+3)<0$,得$-1<k<0$或$0<k<1$.

综上,可知存在满足条件的直线l,其斜率k的取值范围是$(-1,1)$. ……………………………………………… (12 分)