2023年河南省五市高三第一次联合调研检测
数学文科参考答案

一、选择题

1-5 DBDCD　6-10 CBBCA　11-12 BC

二、填空题

13.182　14.$\frac{3}{\pi}$　15.$\frac{4\sqrt{5}}{3}$　16.-6

三.解答题

17.解:(1)由题意得,分数在[80,90)上抽取2人,记为a,b;

分数在[90,100]上抽取3人,记为A,B,C.

选取2人作为学习小组长的基本事件有10个,其中两位小组长的分数都在[90,100]上的有3个基本事件

∴所求概率 $P=\frac{3}{10}$. …………6分

(2)完善表格如下:

	有人陪伴在身边学习	独自学习	总计
分数超过80	220	110	330
分数不超过80	80	90	170
总计	300	200	500

$K^2=\frac{500\times(220\times90-110\times80)^2}{300\times200\times170\times330}\approx17.974>6.635$, …………12分

故有99%的把握认为"学习强国"*App*得分情况受是否有人陪伴的影响.

18.(1)证明:在ΔABC中,由已知及余弦定理,得$(a+b)b=c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,

即$b=a-2b\cos C$.

由正弦定理,得$\sin B=\sin A-2\sin B\cos C$,又$A=\pi-(B+C)$, …………3分

故$\sin B=\sin(B+C)-2\sin B\cos C=\sin B\cos C+\cos B\sin C-2\sin B\cos C$

$=\cos B\sin C-\sin B\cos C=\sin(C-B)$.

$\because 0<\sin B=\sin(C-B)$, $\therefore 0<C-B<C<\pi$,

$\because B+(C-B)=C<\pi$, $\therefore B=C-B$, 故$C=2B$. …………6分

(2)由(1)$C=2B$得$B+C=3B\in(0,\pi)$, $\therefore B\in(0,\frac{\pi}{3})$, $\cos B\in(\frac{1}{2},1)$, …… 8分

由(1)$a=b(1+2\cos C)$, $C=2B$得

$\frac{a+4b}{b\cos B}=\frac{5+2\cos C}{\cos B}=\frac{5+2\cos 2B}{\cos B}=\frac{5+2(2\cos^2B-1)}{\cos B}$ …………10分

$=4\cos B+\frac{3}{\cos B}\geqslant 2\sqrt{4\cos B\cdot\frac{3}{\cos B}}=4\sqrt{3}$,

当且仅当 $B=\frac{\pi}{6}\in(0,\frac{\pi}{3})$ 时等号成立，

所以当 $B=\frac{\pi}{6}$ 时，$\frac{a+4b}{b\cos B}$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$. …………………………………… 12 分

19.(1)由题知 $BC\perp BB_1$，又 $BC\perp A_1E$，且 $BB_1\cap A_1E=E$，所以 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，则 $BC\perp AB$.

$AB=BC=2$，$AA_1=4$，连接 B_1D_1，BD，因为 D_1 是 A_1C_1 的中点，所以 $B_1D_1=\sqrt{2}$，且 $B_1D_1\perp A_1C_1$.

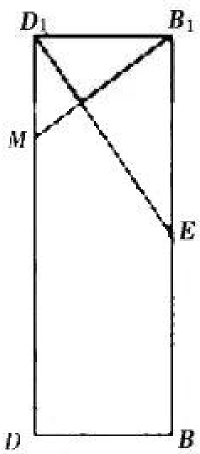
因为 $CC_1\perp A_1C_1$，$CC_1/\!/DD_1$，所以 $DD_1\perp A_1C_1$，因为 $B_1D_1\cap DD_1=D_1$，

所以 $A_1C_1\perp$ 平面 BB_1D_1D，因为 $B_1M\subset$ 平面 BB_1D_1D，所以 $A_1C_1\perp B_1M$. …… 3 分

连接 D_1E，如图，$B_1D_1=\sqrt{2}$，$B_1E=2$，因为 $\lambda=\frac{3}{4}$，所以 $D_1M=1$，则 $\frac{D_1M}{D_1B_1}=\frac{B_1D_1}{B_1E}$，

所以 $\triangle D_1B_1M\backsim\triangle B_1ED_1$，则 $\angle D_1B_1M=\angle B_1ED_1=\angle MD_1E$，

则 $\angle B_1MD_1+\angle MD_1E=\angle B_1MD_1+\angle D_1B_1M=90°$，所以 $D_1E\perp B_1M$.



因为 $A_1C_1\cap D_1E=D_1$，所以 $B_1M\perp$ 平面 A_1C_1E. ………… 6 分

(2)连接 BD，因为 $AB=BC=2$，$AB\perp BC$，D 是 AC 的中点，所以 $BD\perp AC$，且 $AD=BD=\sqrt{2}$，

设 $DM=t$，$t>0$，则 $AM=BM=\sqrt{t^2+2}$，取 AB 的中点 F，则 $AF=BF=1$，连接 FM，则 $FM\perp AB$，且 $FM=\sqrt{t^2+1}$，则 $S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{t^2+1}=\sqrt{t^2+1}$， ………………………………………………… 9 分

所以 $V_{三棱锥D-ABM}=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\sqrt{t^2+1}=\frac{\sqrt{10t^2+10}}{10}$，

又 $V_{三棱锥M-ABD}=\frac{1}{3}\times t\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\frac{1}{3}t$，利用 $V_{三棱锥D-ABM}=V_{三棱锥M-ABD}$ 得

$\frac{1}{3}t=\frac{\sqrt{10t^2+10}}{10}$，解得 $t=3$，

又因为 $DD_1=AA_1=4$，所以 $\lambda=\frac{DM}{DD_1}=\frac{t}{4}=\frac{3}{4}$，

因此，当 $\lambda=\frac{3}{4}$ 时，点 D 到平面 ABM 的距离为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. ……………………… 12 分

20.解：(1)∵ $f(x)=(x+a)(\ln x+3)$，函数定义域为 $(0,+\infty)$

∴ $f'(x)=\ln x+3+\frac{x+a}{x}=\ln x+\frac{a}{x}+4\ (x>0)$，

∵ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，∴ $\ln x+\frac{a}{x}+4\geq0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立， …… 3 分

$-a\leq x\ln x+4x$，记 $g(x)=x\ln x+4x$，$g'(x)=\ln x+5$

$g'(x)<0$,解得 $0<x<e^{-5}$,$g'(x)>0$,解得 $x>e^{-5}$,

$\therefore g(x)$在$(0,e^{-5})$上单调递减,在$(e^{-5},+\infty)$上单调递增,

$\therefore g(x)_{\min}=g(e^{-5})=-5e^{-5}+4e^{-5}=-e^{-5}$,

$\therefore -a\leqslant -e^{-5}\Rightarrow a\geqslant e^{-5}$,

a 的取值范围为$[e^{-5},+\infty)$ …………………………………………………… 5 分

(2)由 $a=2$ 可知,$f(x)=(x+2)(\ln x+3)>kx$,

$\therefore k<\dfrac{(x+2)(\ln x+3)}{x}$,记 $h(x)=\dfrac{(x+2)(\ln x+3)}{x}$,

$\because h'(x)=\dfrac{x-2\ln x-4}{x^2}(x>1)$, …………………………………………………… 7 分

令 $\tau(x)=x-2\ln x-4$,$\tau'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}$,

$\tau'(x)<0$,解得 $1<x<2$,$\tau'(x)>0$,解得 $x>2$

$\tau(x)$在$(1,2)$上单调递减,在$(2,+\infty)$上单调递增,

$\tau(8)=4-2\ln 8=4-6\ln 2<0$,$\tau(9)=5-2\ln 9=5-4\ln 3>0$,

$\therefore \exists x_0\in(8,9)$,$\tau(x_0)=x_0-2\ln x_0-4=0(*)$,

$x\in(1,x_0)$,$\tau(x)<0$,$\therefore h'(x)<0$,$\therefore h(x)$单调递减,

$x\in(x_0,+\infty)$,$\tau(x)>0$,$h'(x)>0$,$\therefore h(x)$单调递增, ……………………… 10 分

$$h(x)_{\min}=h(x_0)=\frac{(x_0+2)(\ln x_0+3)}{x_0}$$

$$=\frac{(x_0+2)\left(\frac{x_0+2}{2}\right)}{x_0}=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{4}{x_0}+4\right)=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{4}{x_0}\right)+2,$$

$\because h(8)=6.25$,$h(9)=6\dfrac{13}{18}$,

$\therefore h(x)_{\min}\in(6,7)$,

$\therefore$ 整数 k 的最大值为 6. ………………………………………………………… 12 分

21. 解:(1)当 P 点在 x 轴上时,$P(2,0)$,$PA:y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-2)$,

于是得:$\begin{cases} y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-2) \\ \dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1 \end{cases}\Rightarrow\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{2}\right)x^2-2x+1=0$,由 $\Delta=0$ 得 $a^2=2$,

故椭圆方程为:$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$; …………………………………………………… 4 分

(2)设切线为 $y=kx+m$,设 $P(2,y_0)$,$A(x_1,y_1)$,

则$\begin{cases} y=kx+m \\ x^2+2y^2-2=0 \end{cases}\Rightarrow(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$ 由 $\Delta=0$ 得 $m^2=2k^2+1$, …… 6 分

且 $x_1=\frac{-2km}{1+2k^2},y_1=\frac{m}{1+2k^2},y_0=2k+m$ 则 $|PO|=\sqrt{y_0^2+4}$，

直线 PO 为：$y=\frac{y_0}{2}x\Rightarrow$ 点 A 到直线 PO 距离 $d=\frac{|y_0x_1-2y_1|}{\sqrt{y_0^2+4}}$，…………………… 8 分

则 $S_{\triangle POA}=\frac{1}{2}|PO|\cdot d=\frac{1}{2}|y_0x_1-2y_1|=\frac{1}{2}\left|(2k+m)\frac{-2km}{1+2k^2}-\frac{2m}{1+2k^2}\right|$

$=\left|\frac{1+2k^2+km}{1+2k^2}m\right|=|k+m|$. ……………………………………………………… 10 分

当 $m=\sqrt{2k^2+1}$ 时，$S=|k+\sqrt{1+2k^2}|$.

$(S-k)^2=1+2k^2\Rightarrow k^2+2Sk-S^2+1=0$，

因为 $\Delta=8S^2-4\geqslant0\Rightarrow S\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，此时 $k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

同理当 $m=-\sqrt{2k^2+1}$ 时，可得 $S\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，

此时 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $\triangle POA$ 面积的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………………… 12 分

22. 解：(1) ∵ $\begin{cases}x=2-2\cos\varphi\\y=2\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数），

∴ 曲线 C_1 的普通方程为 $(x-2)^2+y^2=4$，…………………………………………… 2 分

即 $x^2+y^2-4x=0$. ∵ $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，∴ $\rho^2-4\rho\cos\theta=0$，

∴ 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$. ………………………………………… 5 分

(2) 依题意设 $A(\rho_1,\theta)$，$B(\rho_2,\theta)$，

∴ 由 $\begin{cases}\theta=\alpha\\\rho=4\cos\theta\end{cases}$，可得 $\rho_1=4\cos\alpha$，

由 $\begin{cases}\theta=\alpha\\\rho=4\sin\theta\end{cases}$，得 $\rho_2=4\sin\alpha$.

∵ $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，∴ $\rho_2>\rho_1$，……………………………………………………… 7 分

∴ $|AB|=|OB|-|OA|=\rho_2-\rho_1=4\sin\alpha-4\cos\alpha$，

∵ OM 是圆 C_2 的直径，∴ $\angle OBM=\frac{\pi}{2}$.

∴ 在直角 $Rt\triangle OBM$ 中，$|BM|=4\cos\alpha$，

∵ 在直角 $Rt\triangle ABM$ 中，$\angle AMB=\frac{\pi}{4}$，

∴ $|AB|=|BM|$，即 $4\sin\alpha-4\cos\alpha=4\cos\alpha$，

∴ $\tan\alpha=2$. ……………………………………………………………………… 10 分

23. 解：(1) $f(x)=|x+2|+|2x-3|=\begin{cases}3x-1, & x>\frac{3}{2}\\ 5-x, & -2\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\\ -3x+1, & x<-2\end{cases}$ ………………………… 2 分

即 $\begin{cases}3x-1>6\\ x>\frac{3}{2}\end{cases}$，或 $\begin{cases}5-x>6\\ -2\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\end{cases}$，或 $\begin{cases}-3x+1>6,\\ x<-2,\end{cases}$ 解得或 $x>\frac{7}{3}$ 或 $x<-1$，所以原不等式的解集为 $\{x|x>\frac{7}{3}$ 或 $x<-1\}$. …………………………………………………………… 5 分

(2) 证明：由 (1) 知当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$f(x)$ 有最小值 $\frac{7}{2}$，

所以 $m=\frac{7}{2}$，$a^2+\frac{b^2}{9}=\frac{7}{2}$. 因为，$(\frac{1}{a}+\frac{3}{b})^2=\frac{1}{a^2}+\frac{9}{b^2}+\frac{6}{ab}$，

所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{9}{b^2}+\frac{6}{ab}=\frac{2}{7}(a^2+\frac{b^2}{9})(\frac{1}{a^2}+\frac{9}{b^2}+\frac{6}{ab})=\frac{2}{7}(2+\frac{b^2}{9a^2}+\frac{6a}{b}+\frac{2b}{3a}+\frac{9a^2}{b^2})$，………… 7 分

因为 $\frac{9a^2}{b^2}+\frac{b^2}{9a^2}\geqslant 2$，$\frac{6a}{b}+\frac{2b}{3a}\geqslant 4$. 当且仅当 $b=3a$ 时取等号，

所以 $(\frac{1}{a}+\frac{3}{b})^2\geqslant\frac{16}{7}$，当且仅当 $b=3a$ 时取等号，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{3}{b}\geqslant\frac{4\sqrt{7}}{7}$，当且仅当 $a=\frac{\sqrt{7}}{2}$，$b=\frac{3\sqrt{7}}{2}$ 时取等号. ……………………… 10 分

方法二. $f(x)=|x+2|+|x-\frac{3}{2}|+|x-\frac{3}{2}|\geqslant|2+\frac{3}{2}|+0=\frac{7}{2}$

仅当 $x=\frac{3}{2}$ 时等号成立，所以 $m=\frac{7}{2}$，$a^2+\frac{b^2}{9}=\frac{7}{2}$. ……………………………… 7 分

$$\therefore \frac{1}{a}+\frac{3}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{\frac{b}{3}}\geqslant\frac{2}{\sqrt{\frac{a^2+\frac{b^2}{9}}{2}}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$$

当且仅当 $\begin{cases}a=\frac{b}{3}\\ a^2+\frac{b^2}{9}=\frac{7}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{\sqrt{7}}{2}\\ b=\frac{3\sqrt{7}}{2}\end{cases}$ 时等号成立. ……………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。