理数参考答案及评分细则

一、选择题

1. B 【解析】∵$A=\{x\mid x^2-x-2\leqslant 0\}=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\{x\mid x<0\}$,∴$A\cap B=\{x\mid -1\leqslant x<0\}$. 故选 B.

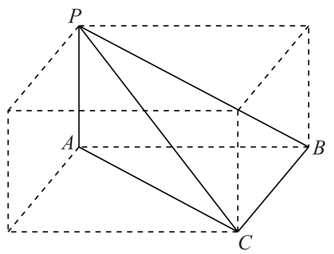
2. C 【解析】∵$z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$,∴$z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}\cdot(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})\cdot(1-\mathrm{i})}=\dfrac{2\mathrm{i}+2}{2}=1+\mathrm{i}$,∴$|z|=\sqrt{2}$. 故选 C.

3. D 【解析】在等差数列$\{a_n\}$中,∵$a_2+a_{10}=2a_6$,∴$a_6=0$,又∵$a_6+a_8=-4$,∴$a_7=-2$,∴公差为 $d=a_7-a_6=-2$,∴$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_6+(n-6)d=0+(n-6)\times(-2)=12-2n$,∴$a_{100}=12-2\times 100=-188$. 故选 D.

4. B 【解析】∵$\sin(\alpha+\pi)=\dfrac{1}{3}$,∴$\sin\alpha=-\dfrac{1}{3}$,$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-\dfrac{2}{9}=\dfrac{7}{9}$,∴$\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\frac{7}{9}}{-\frac{1}{3}}=-\dfrac{7}{3}$. 故选 B.

5. D 【解析】$T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r(x^2)^{6-r}\left(\dfrac{2}{x}\right)^r=\mathrm{C}_6^r\cdot 2^r\cdot x^{12-3r}$,当 $r=3$ 时,$12-3r=3$,此时系数为 $\mathrm{C}_6^r 2^r=\mathrm{C}_6^3 2^3=160$. 故选 D.

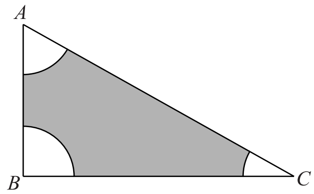
6. B 【解析】根据三视图画出该几何体的直观图为如图所示的四面体 $PABC$,PA 垂直于等腰直角三角形 ABC 所在的平面,将其放置于正方体中(如图所示),



可知该正方体的所有棱长为 2,所以 $V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PA=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot PA=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times 2=\dfrac{4}{3}$. 故选 B.

7. A 【解析】$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. 故选 A.

8. D 【解析】∵$AB=6$ km,$BC=8$ km,$AC=10$ km,∴$AB^2+BC^2=AC^2$,∴$AB\perp BC$. 根据题意知点 M 所在区域如图阴影部分所示,



$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times 6\times 8=24$,$S_{阴影}=24-\dfrac{1}{2}\pi\times 4=24-2\pi$,∴$P=\dfrac{24-2\pi}{24}=\dfrac{12-\pi}{12}$. 故选 D.

9. C 【解析】∵函数 $f(x)=ax^3+(a-1)x^2-2x$ 为奇函数,∴$f(-x)=-f(x)$,∴$a=1$,从而 $f(x)=x^3-2x$,∴$f'(x)=3x^2-2$,∴$k=f'(-1)=1$,且 $f(-1)=1$,∴切线方程为 $y-1=x+1$,即 $y=x+2$. 故选 C.

10. B 【解析】∵$f(0)=\sqrt{3}$,∴$\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,又∵$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$,∴$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$,从而 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$,∴$g(x)=2\sin\left[\omega\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\pi}{3}\right]$. ∵$g(x)$的图象关于直线 $x=\dfrac{3\pi}{4}$对称,∴$\omega\left(\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,即 $\omega\times\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,令 $k=1$,得 $\omega=2$. 故选 B.

11. D 【解析】$x\ln x-x-a\geqslant 0$ 恒成立,即为 $a\leqslant x\ln x-x$ 在$(0,+\infty)$上恒成立,记 $f(x)=x\ln x-x$,$x\in(0,+\infty)$,则 $f'(x)=\ln x+1-1=\ln x$,令 $\ln x=0$,得 $x=1$,当 $x\in(0,1)$时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$单调递减,当 $x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$单调递增,所以 $f(x)_{\min}=f(1)=-1$,所以 $a\leqslant -1$. 故选 D.

12. A 【解析】设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,直线 PQ:$x=$

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：zizzsw。

微信扫一扫，快速关注

$ky+a$,联立方程$\begin{cases}x=ky+a,\\ y^2=2x\end{cases}\Rightarrow y^2-2ky-2a=0$,

$\therefore y_1+y_2=2k, y_1y_2=-2a$,$\therefore \frac{1}{|PM|^2}+\frac{1}{|QM|^2}=$

$\frac{1}{(x_1-a)^2+y_1^2}+\frac{1}{(x_2-a)^2+y_2^2}=\frac{1}{k^2+1}\left(\frac{1}{y_1^2}+\frac{1}{y_2^2}\right)$

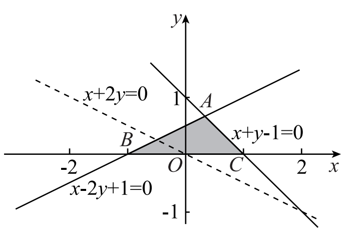
$=\frac{1}{k^2+1}\cdot\frac{y_1^2+y_2^2}{y_1^2y_2^2}=\frac{1}{k^2+1}\cdot\frac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{(y_1y_2)^2}=$

$\frac{k^2+a}{a^2(k^2+1)}$,$\because \frac{1}{|PM|^2}+\frac{1}{|QM|^2}$为常数,$\therefore a=1$,满足$\Delta=4k^2+8>0$. 故选 A.

二、填空题

13.20 **【解析】**由题意可设等比数列的公比为q,则由$a_1+a_3=10$,得$a_1+a_1q^2=10$. 又$\because a_1=2$,解得$q^2=4$,$\because q>0$,$\therefore q=2$,$\therefore a_2+a_4=(a_1+a_3)q=10\times2=20$. 故填 20.

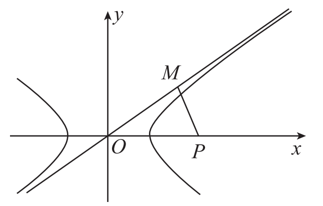
14.$\frac{5}{3}$ **【解析】**作出约束条件可行域如下图阴影部分:



目标函数$z=x+2y$可化为$y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$,将$y=-\frac{1}{2}x$进行平移,可得在$A\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$处截距最大,即$z$最大,将$x=\frac{1}{3}$,$y=\frac{2}{3}$代入得$z_{\max}=\frac{5}{3}$. 故填$\frac{5}{3}$.

15.1 **【解析】**由点到直线的距离公式可知圆心O到直线的距离为$d=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}$,$\therefore$弦长$|AB|=2\sqrt{3-d^2}=2\sqrt{3-\frac{1}{m^2+n^2}}$,$\because |AB|=2\sqrt{2}$,$\therefore\sqrt{3-\frac{1}{m^2+n^2}}=\sqrt{2}\Rightarrow m^2+n^2=1$. 故填 1.

16.$\frac{\sqrt{6}}{2}$ **【解析】**由题意,双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线为$y=\frac{b}{a}x$,$\because OM=\sqrt{6}$,$PM=\sqrt{3}$,且$PM$垂直于渐近线$y=\frac{b}{a}x$,$\therefore\frac{b}{a}=\frac{PM}{OM}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$. 故填$\frac{\sqrt{6}}{2}$.



三、解答题

17.**解**:(1)$\because A=\frac{\pi}{3}$,$a=\sqrt{3}$,$b=\sqrt{2}$,

$\therefore$由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得$\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sin B}$,

解得$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$. (3 分)

又$\because B\in(0,\pi)$,

$\therefore B=\frac{\pi}{4}$或$B=\frac{3\pi}{4}$,

又$\because a>b$,$\therefore B=\frac{\pi}{4}$. (5 分)

$\therefore C=\frac{5\pi}{12}$. (7 分)

(2)$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ab\sin C$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$.

(12 分)

18.**解**:(1)由$(0.005+0.010+0.025+a+0.020)\times10=1$,

解得$a=0.040$. (2 分)

令中位数为x,则$(0.005+0.010+0.025)\times10+0.040\times(x-80)=0.5$,

解得$x=82.5$,所以综合评分的中位数为 82.5.

(5 分)

(2)由(1)与频率分布直方图可知,一等品的频率为$(0.040+0.020)\times10=0.6$,

即概率为 0.6,设所抽取的产品为一等品的个数为X,

则$X\sim B\left(3,\frac{3}{5}\right)$, (6 分)

所以$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$,

$P(X=1)=C_3^1\times\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{36}{125}$,

$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}=\frac{54}{125}$,

$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$. (8 分)

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

(10 分)

所抽取的产品为一等品的数学期望 $E(X)=3\times\frac{3}{5}$

$=\frac{9}{5}$. (12 分)

19. **解**:(1)因为底面 $BCDE$ 为正方形,且 $BC=2$,$AB=4$,$AC=AE=2\sqrt{5}$,

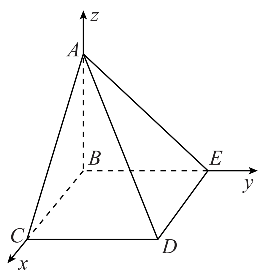
所以 $AC^2=AB^2+BC^2$,$AE^2=AB^2+BE^2$,

所以 $AB\perp BC$,$AB\perp BE$.

又 $BC\cap BE=B$,$BC\subset$ 平面 $BCDE$,$BE\subset$ 平面$BCDE$,

所以 $AB\perp$平面 $BCDE$. (5 分)

(2)由(1)知 $AB\perp$平面 $BCDE$,又因为底面 $BCDE$ 为正方形,所以分别以$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{BE}$,$\overrightarrow{BA}$为 x,y,z 轴的正方向建立如图所示空间直角坐标系,



则 $B(0,0,0)$,$A(0,0,4)$,$C(2,0,0)$,$D(2,2,0)$,$E(0,2,0)$,

所以$\overrightarrow{AC}=(2,0,-4)$,$\overrightarrow{AD}=(2,2,-4)$,$\overrightarrow{AE}=(0,2,-4)$, (6 分)

设平面 ACD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x,y,z)\cdot(2,0,-4)=0,\\ (x,y,z)\cdot(2,2,-4)=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}x=2z,\\ x+y-2z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$,所以 $\boldsymbol{n}=(2,0,1)$. (8 分)

同理可求得平面 ADE 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(0,2,1)$, (10 分)

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{(2,0,1)\cdot(0,2,1)}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}$

$=\frac{1}{5}$.

又二面角 $C-AD-E$ 的平面角为钝角,

故二面角 $C-AD-E$ 的余弦值为$-\frac{1}{5}$. (12 分)

20. **解**:(1)当 OP,OQ 分别在坐标轴上时,显然有

$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$, (1 分)

当 OP,OQ 不在坐标轴上时,设直线 OP:$y=kx$,

联立方程$\begin{cases}y=kx,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow(k^2a^2+b^2)x^2=a^2b^2\Rightarrow x^2=$

$\frac{a^2b^2}{k^2a^2+b^2}$,$y^2=\frac{k^2a^2b^2}{k^2a^2+b^2}$,

所以$\frac{1}{|OP|^2}=\frac{k^2a^2+b^2}{(k^2+1)a^2b^2}$, (4 分)

用$-\frac{1}{k}$代替上式中的 k,可得$\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{a^2+k^2b^2}{(k^2+1)a^2b^2}$, (5 分)

所以$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{k^2a^2+b^2}{(k^2+1)a^2b^2}+\frac{a^2+k^2b^2}{(k^2+1)a^2b^2}$

$=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$(定值). (6 分)

(2)由椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的长轴长为 4,离心率为$\frac{1}{2}$,得椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,由(1)的证明可知$\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$, (8 分)

即$\frac{|OP|^2+|OQ|^2}{|OP|^2\cdot|OQ|^2}=\frac{7}{12}\Rightarrow\frac{|PQ|^2}{(|OP|\cdot|OQ|)^2}=\frac{7}{12}$,

即$\frac{(|PQ|\cdot|OD|)^2}{|PQ|^2}=\frac{12}{7}\Rightarrow|OD|^2=\frac{12}{7}$, (10 分)

所以点 D 的轨迹方程为 $x^2+y^2=\frac{12}{7}$. (12 分)

21. **解**:(1)$f(x)=\ln x-2x+a$ 的定义域为$(0,+\infty)$,

令 $f(x)=\ln x-2x+a=0$,则 $a=2x-\ln x$.

记 $g(x)=2x-\ln x$,$x>0$,

则 $g'(x)=2-\frac{1}{x}=\frac{2x-1}{x}$,令 $g'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{2}$, (2 分)

当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,

当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增.

(3分)

所以 $g(x)$有最小值，且为 $g\left(\frac{1}{2}\right)=1+\ln 2$.

又当 $x\to 0$ 时，$g(x)\to+\infty$；

当 $x\to+\infty$时，$g(x)\to+\infty$；

所以要使函数 $f(x)$有两个零点，则函数 $g(x)$的图象与 $y=a$ 有两个不同的交点，

则 $a>1+\ln 2$，即实数 a 的取值范围为$(1+\ln 2,+\infty)$. (5分)

(2)由(1)的证明可知 $2x-\ln x\geqslant 1+\ln 2$，

当且仅当 $x=\frac{1}{2}$时取等号，

因此要证明 $2x-\ln x\geqslant\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-x+\frac{1}{2}}+\ln 2$，

即只需要证明$\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-x+\frac{1}{2}}\leqslant 1$， (7分)

记 $\varphi(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-x+\frac{1}{2}}$，

则 $\varphi'(x)=e^{-x+\frac{1}{2}}-\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-x+\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{1}{2}-x\right)e^{-x+\frac{1}{2}}$，

令 $\varphi'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，

当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$单调递增，

当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$单调递减，

(10分)

所以 $\varphi(x)\leqslant\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$，

即$\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-x+\frac{1}{2}}\leqslant 1$ 恒成立，

当且仅当 $x=\frac{1}{2}$时取等号，

所以 $2x-\ln x\geqslant\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-x+\frac{1}{2}}+\ln 2$，

当且仅当 $x=\frac{1}{2}$时取等号. (12分)

22. **解：**(1)将$\begin{cases}x=1+t,\\y=2t\end{cases}$($t$ 为参数)中的参数 t 消去，得 $y=2x-2$，

所以直线 l 的普通方程为 $y=2x-2$. (2分)

由 $\rho\sin^2\theta-4\cos\theta=0$，

得 $\rho^2\sin^2\theta=4\rho\cos\theta$，

即 $y^2=4x$，

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2=4x$. (5分)

(2)方法一：联立方程$\begin{cases}y^2=4x,\\y=2x-2\end{cases}\Rightarrow x^2-3x+1=0$，$\Delta>0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=3$. (7分)

因为直线 l 恰好过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，

所以$|AB|=x_1+x_2+2=5$. (10分)

方法二：令 $t=\frac{\sqrt{5}}{5}t'$，则有$\begin{cases}x=1+\frac{\sqrt{5}}{5}t',\\y=\frac{2\sqrt{5}}{5}t',\end{cases}$($t'$为参数)，

(6分)

将其代入方程 $y^2=4x$ 中，得$\frac{4}{5}t'^2-\frac{4\sqrt{5}}{5}t'-4=0$，$\Delta>0$.

设点 A，B 对应的参数分别为 t'_1，t'_2，

则 $t'_1+t'_2=\sqrt{5}$，$t'_1\cdot t'_2=-5$， (8分)

所以$|AB|=|t'_1-t'_2|=\sqrt{(t'_1+t'_2)^2-4t'_1\cdot t'_2}=\sqrt{5+20}=5$. (10分)

23. **解：**(1)由 $f(x)\leqslant 1$，得$|2x+1|\leqslant 1$，

即$-1\leqslant 2x+1\leqslant 1$，

解得$-1\leqslant x\leqslant 0$，

所以原不等式的解集为$[-1,0]$. (4分)

(2)$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x^2)\geqslant a|x|$恒成立，

即为$\forall x\in\mathbf{R}$，$2x^2+1\geqslant a|x|$恒成立.

当 $x=0$ 时，$a\in\mathbf{R}$； (5分)

当 $x\neq 0$ 时，$a\leqslant\frac{2x^2+1}{|x|}=2|x|+\frac{1}{|x|}$.

因为 $2|x|+\frac{1}{|x|}\geqslant 2\sqrt{2}$$\left(\text{当且仅当 }2|x|=\frac{1}{|x|}\text{，即 }|x|=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{时等号成立}\right)$，

所以 $a\leqslant 2\sqrt{2}$.

综上，$a\leqslant 2\sqrt{2}$.

故实数 a 的最大值为 $2\sqrt{2}$. (10分)