邕衡金卷2023届高考第三次适应性考试

理科数学参考答案

1.B【解析】$B=\{y\mid y=2^x\}=\{y\mid y>0\}$，则$A\cup B=(-1,+\infty)$，故选B.

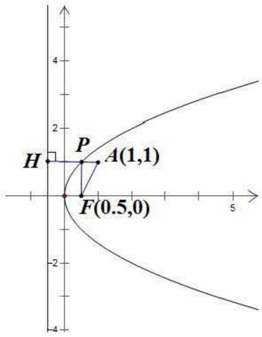
2.D【解析】因为$1+a\mathrm{i}=-b+\mathrm{i}$，由复数相等得$a=1$，$b=-1$，$z=a+b\mathrm{i}$在复平面对应点坐标（1，－1）在第四象限，故选D.

3.B【解析】由$E(X)=-1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$且$E(Y)=aE(X)+3=-\frac{a}{3}+3=\frac{7}{3}$得：$a=2$

4. A【解析】设经过x天"进步"的值是"退步"的值的2倍，则$\left(\frac{1.01}{0.99}\right)^x=2$，

$\therefore x=\log_{\frac{1.01}{0.99}}2=\frac{\lg 2}{\lg\frac{1.01}{0.99}}=\frac{\lg 2}{\lg\frac{101}{99}}=\frac{\lg 2}{\lg 101-\lg 99}\approx\frac{0.3010}{2.0043-1.9956}=\frac{0.3010}{0.0087}\approx 3$. 故选：A.

5.B【解析】根据题意画出如下图，根据抛物线的定义$|PF|=|PH|$，所以当A,P,H三点共线时$|PA|+|PF|$最小，此时$|PA|+|PF|=x_A+\frac{p}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，故选B.



6. B【解析】因为$\vec{i}$和$\vec{j}$是正交单位向量，$\vec{a}=(2,3)$，$\vec{b}=(1,k)$，$\vec{a}-\vec{b}=(1,3-k)$，

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{1+(3-k)^2}=\sqrt{2}$，解得$k=2$或$k=4$所以故选B.

7. C【解析】因为$\sin C=3\sin A$，由正弦定理可得$c=3a$，且$b^2=2ac$，由余弦定理可得：$cosB=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+9a^2-6a^2}{6a^2}=\frac{2}{3}$，故选C.

8.B【解析】由题意可知，该几何体是球体被挖去一个圆锥，圆锥底面半径为$\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，高为6，设球的半径为$R$，可得$R^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+(6-R)^2$，解得$R=4$，所以体积为$V_\Omega=\frac{4}{3}\times\pi\times R^3=\frac{256\pi}{3}$.

9.A【解析】由已知得：$\tan\alpha=3$，所以$3\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{3\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{3\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{9}{10}$

10.B【解析】由题意得$m(x-2y)+5y-2=0$，易知其过定点$P(\frac{4}{5},\frac{2}{5})$，由$(\frac{4}{5})^2+(\frac{2}{5})^2<4$知该定点在圆内，由几何性质知，圆心到直线的距离$d\le|OP|=\sqrt{(\frac{4}{5})^2+(\frac{2}{5})^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

11. D【解析】设渐近线$y=\frac{b}{a}x$的倾斜角为α，则$\angle OQF=\pi-2\alpha$，$\tan\angle OQF=\tan(\pi-2\alpha)=-\tan 2\alpha=-\frac{3}{4}$，则$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{3}{4}$，解得$\tan\alpha=-3$(舍去)或$\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\therefore\frac{b}{a}=\frac{1}{3}$，$\therefore e^2=1+(\frac{b}{a})^2=\frac{10}{9}$，$\therefore e=\frac{\sqrt{10}}{3}$，故选D.

12.C【解析】根据题$a^2=(\frac{2}{3}\sqrt{e})^2=\frac{4}{9}\times e>0.8$，所以$a>c$，构造函数$f(x)=\ln x-\frac{1}{e}x$，$x>0$，则

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}$，当$0<x<e$，$f'(x)>0$，当$x>e$时，$f'(x)<0$，则函数$f(x)=\ln x-\frac{1}{e}x$在(0，$e$)

上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，故$f(x)\le f(e)=\ln e-1=0$，故$\ln x\le\frac{1}{e}x$，当且仅当$x=e$时取等号，由于$x^2>0$，则$\ln x^2\le\frac{1}{e}x^2$，则$2\ln x\le\frac{1}{e}x^2$，所以$2\ln 1.3<\frac{1}{e}(1.3)^2=\frac{1}{e}\times1.69<0.8$，所以$b<c$，所以$b<c<a$，故选C.

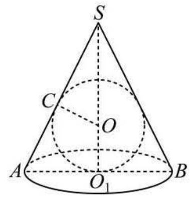
13. 5【解析】根据题意画出可行域，目标函数$z=2x+y+\frac{1}{2}$的最大值在点$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$处取得，

$z=2\times\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=5$.

14. 答案：-1；【解析】令$x=0$，可得$a_0=1$，令$x=\frac{1}{3}$，则$a_0+\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\cdots+\frac{a_{2023}}{3^{2023}}=0$，所以$\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\cdots+\frac{a_{2023}}{3^{2023}}=-1$

15. 【答案】$2+\sqrt{2}$ 【详解】设$SO=x$，半径$AO_1=BO_1=r$，高$SO_1=x+1=h>2$.

球半径为单位长度$OC=OO_1=1$，$\because\Delta SCO\sim\Delta SO_1A$，$\therefore\frac{OC}{SO}=\frac{AO_1}{SA}$，



即$\frac{1}{x}=\frac{r}{\sqrt{r^2+(x+1)^2}}$，$\therefore xr=\sqrt{r^2+(x+1)^2}$，$r^2=\frac{x+1}{x-1}=\frac{h}{h-2}$，

$\therefore$侧面积$S=\pi r\sqrt{r^2+(x+1)^2}=\pi r^2x=\pi\frac{h}{h-2}(h-1)=\pi\frac{h^2-h}{h-2}$，只要求$y=\frac{h^2-h}{h-2}$的最小值即可，

$y'=\frac{h^2-4h+2}{(h-2)^2}=\frac{(h-2)^2-2}{(h-2)^2}=0$，$(h-2)^2-2=0$，得$h=2+\sqrt{2}$.

当$h\in(2,2+\sqrt{2}),y'<0,y$递减，当$h\in(2+\sqrt{2},+\infty),y'>0,y$递增，故$h=2+\sqrt{2}$时侧面积有最小值.

16. ②④【解析】对①，$f(x+\pi)=\tan(x+\pi)-2\sin(x+\pi)=\tan x+2\sin x\ne f(x)$，故①错误；

对②，因为$f(x)+f(2k\pi-x)=\tan x-2\sin x+\tan(2k\pi-x)-2\sin(2k\pi-x)=\tan x-2\sin x-\tan x+2\sin x=0$，所以$f(x)$关于点$(k\pi,0)$对称，故②正确；

对③，$f'(x)=\frac{1}{\cos^2x}-3\cos x=\frac{1-3\cos^3x}{\cos^2x}$，令$f'(x_0)=0$，则$\cos^3x_0=\frac{1}{3}$，

当$x\in(0,x_0)$，$f'(x_0)<0$；$x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f'(x_0)>0$，所以$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上的最小值是$f(x_0)$；

又$f(\frac{\pi}{4})=\tan\frac{\pi}{4}-3\sin\frac{\pi}{4}=1-\frac{3\sqrt{2}}{2}$，而$\cos^3\frac{\pi}{4}\ne\frac{1}{3}$，所以$x_0\ne\frac{\pi}{4}$，故③错误；

对④，$f(x)=0$得$\sin x=0$或$\cos x=\frac{1}{3}$，因为$x\in(0,2\pi)$，所以当$\sin x=0$时，解得$x=\pi$，

当$\cos x=\frac{1}{3}$时，因为在$x\in(0,2\pi)$上函数$y=\cos x-\frac{1}{3}$的对称轴为$x=\pi$，所以它的两零点之和为$2\times\pi=2\pi$，

故$y=f(x)$在$(0,2\pi)$内的所有零点之和为3π，故④正确.

17.【解析】(1) 由 $a_n^2-a_na_{n-1}-2a_{n-1}^2=0$ 得 $(a_n-2a_{n-1})(a_n+a_{n-1})=0$ …………………(2分)

因为 $a_n>0$ 所以 $a_n+a_{n-1}>0$ 所以 $a_n-2a_{n-1}=0$ 即 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=2$，…………………………(4分)

由 $a_1=2$ 所以 $a_n=2^n$. ……………………………………………………(6分)

(2) 由 $b_n=\log_2 a_n=\log_2 2^n=n$……………………………………………………(7分)

得 $c_n=\log_2\frac{b_{n+1}}{b_n}=\log_2(n+1)-\log_2 n$…………………………………………(8分)

$S_n=\log_2 2-\log_2 1+\log_2 3-\log_2 2+\log_2 4-\log_2 3+\cdots+\log_2(n+1)-\log_2 n$

$=\log_2(n+1)-\log_2 1=\log_2(n+1)$……………………………………………(12分)

18.【解析】(1) 100名居民本次竞赛成绩方差

$s^2=(45-75)^2\times\frac{2}{100}+(55-75)^2\times\frac{4}{100}+(65-75)^2\times\frac{22}{100}$

$+(75-75)^2\times\frac{40}{100}+(85-75)^2\times\frac{28}{100}+(95-75)^2\times\frac{4}{100}=100$ ……………………………(4分)

(2) ①由于近似为样本成绩平均分，近似为样本成绩方差，

所以，$\mu=75,\sigma^2=100$，

可知，$\sigma=\sqrt{100}=10$，

由于竞赛成绩X近似地服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，

因此竞赛居民可获得“参赛纪念证书”的概率

$P(\mu-\sigma<X\le\mu+2\sigma)$

$=\frac{1}{2}P(\mu-\sigma<X\le\mu+\sigma)+\frac{1}{2}P(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma)$

$\approx\frac{1}{2}\times0.6827+\frac{1}{2}\times0.9545=0.8186$ ……………………………………(8分)

$3000\times0.8186=2455.8\approx2456$

估计获得“参赛纪念证书”的居民人数为2456……………………………(10分)

②当 $X>\mu+2\sigma$ 时，即 $X>95$ 时，参赛居民可获得“参赛先锋证书”，

所以竞赛成绩为96分的居民能获得“参赛先峰证书”……………………………(12分)

19. 【解析】(1)取 AC 中点 O，连接 DO、OB，在正三角形中，$DO\perp AC$，$BO\perp AC$，$DO=BO=\sqrt{3}$，

……………………………………………………………………(1分)

$\because$ 平面 $ACD\perp$ 平面 ABC，平面 $ACD\cap$ 平面 $ABC=AC$，$\therefore DO\perp$ 面 ABC，$BO\perp$ 面 ACD，

……………………………………………………………………(2分)

又 $BE\perp$ 平面 ABC，$\therefore DO//EB$，

又 $\because DO=EB=\sqrt{3}$，$\therefore$ 四边形 $DOBE$ 是平行四边形，$\therefore DE//OB$，…………………(3分)

$\therefore DE\perp$面ADC，…………………………………………………………………………………（4 分）

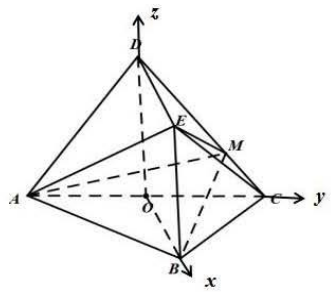
$\because AM\subset$面ADC，$\therefore DE\perp AM$ ………………………………………………………………（5 分）

（2）由（1）$DE\perp$面ADC，$\angle EMD$为EM与面ADC的所成角，即$\angle EMD=\dfrac{\pi}{3}$，

在$Rt\Delta EDM$中，$DM=\dfrac{DE}{\tan\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1$，即$M$为$DC$中点，……………………………………（6 分）

如图，建立空间直角坐标系O-xyz，$A\left(0,-1,0\right)$，$B\left(\sqrt{3},0,0\right)$，$D\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，$C\left(0,1,0\right)$，$M\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{3},1,0\right)$，$\overrightarrow{AM}=\left(0,\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，……………………………（7 分）



易得面DAC的一个法向量为$\overrightarrow{n_1}=\left(1,0,0\right)$，…………………………………（8 分）

设面MAB的一个法向量为$\overrightarrow{n_2}=\left(x,y,z\right)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AM}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0\\ \dfrac{3}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$，令$x$=1，得$\overrightarrow{n_2}=\left(1,-\sqrt{3},3\right)$，…（10 分）

$\left|\cos\left\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{1}{1\cdot\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2+3^2}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$…………………………………………（11 分）

$\therefore$平面AMB与平面ACD所成锐二面角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{13}}{13}$…………………………………（12 分）

20. 【解析】

（1）由题意可得$\dfrac{7p}{2}+\dfrac{p}{2}=1$，…………………………………………………………………………（2 分）

解得$p=\dfrac{1}{4}$，……………………………………………………………………………………………（3 分）

所以抛物线C_1的方程为$x^2=\dfrac{1}{2}y$．……………………………………………………………………（4 分）

（2）设$P\left(x_0,2x_0^2\right)$，$M\left(x_1,2x_1^2\right)$，$N\left(x_2,2x_2^2\right)$，由题知$x_0\neq 0$，$x_0\neq\pm1$，$x_1\neq x_2$，且切线的斜率存在．

设过点$P\left(x_0,2x_0^2\right)$的圆C_2的切线方程为$y-2x_0^2=k\left(x-x_0\right)$，即$kx-y-kx_0+2x_0^2=0$．…………（5 分）

圆心$\left(0,3\right)$到切线的距离为1，得到$\dfrac{\left|-3-kx_0+2x_0^2\right|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，……………………………………………（6 分）

整理得$\left(x_0^2-1\right)k^2+2x_0\left(3-2x_0^2\right)k+\left(3-2x_0^2\right)^2-1=0$，

设PM，PN的斜率分别为k_1，k_2，则有

$k_1+k_2=\dfrac{2x_0\left(2x_0^2-3\right)}{x_0^2-1}$，$k_1\cdot k_2=\dfrac{\left(3-2x_0^2\right)^2-1}{x_0^2-1}$，……（7分）

联立$\begin{cases}y-2x_0^2=k\left(x-x_0\right)\\ y=2x^2\end{cases}$，得$2x^2-kx+kx_0-2x_0^2=0$，……（8分）

因为点P是直线与抛物线的一个交点，有$x_1+x_0=\dfrac{k_1}{2}$，

同理可得$x_2+x_0=\dfrac{k_2}{2}$，……（9分）

因为E为MN中点，$PE\perp MN$，则有$PM=PN$，所以点C_2在PE，从而有$k_{MN}\cdot k_{PC_2}=-1$，

$k_{MN}=\dfrac{2x_1^2-2x_2^2}{x_1-x_2}=2\left(x_1+x_2\right)=k_1+k_2-4x_0=\dfrac{2x_0\left(2x_0^2-3\right)}{x_0^2-1}-4x_0=\dfrac{-2x_0}{x_0^2-1}$，

$PC_2=\dfrac{2x_0^2-3}{x_0}$，所以$\dfrac{2x_0^2-3}{x_0}\cdot\dfrac{-2x_0}{x_0^2-1}=-1$，解得$x_0^2=\dfrac{5}{3}$，……（11分）

所以点P的坐标为$P\left(\pm\dfrac{\sqrt{15}}{3},\dfrac{10}{3}\right)$.……（12分）

21. 【解析】（1）解：当$a=1$时，$f'(x)=\mathrm{e}^x-(\ln x+1)+2x-1$，……（1分）

故$f'(1)=e$，$f(1)=\mathrm{e}$ ……（3分）

故在$x=1$处的切线方程为$y=\mathrm{e}(x-1)+\mathrm{e}=\mathrm{e}x$（或者$\mathrm{e}x-y=0$也可） ……（4分）

（2）证明：不妨设$x_1<x_2$，设$g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-\ln x+x-a$，则$g'(x)=\dfrac{\left(\mathrm{e}^x+x\right)(x-1)}{x^2}$，……（5分）

当$0<x<1$时，$g'(x)<0$，当$x>1$时，$g'(x)>0$，

所以$g(x)$在$(0,1)$单调递减，$g(x)$在$(1,+\infty)$单调递增，……（6分）

可知x_1，x_2也是$g(x)$的两个零点，且$0<x_1<1$，$x_2>1$，于是$0<\dfrac{1}{x_2}<1$，……（7分）

设$h(x)=g(x)-g\left(\dfrac{1}{x}\right)$，因为$h'(x)=g'(x)-g'\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{(x-1)\left(\mathrm{e}^x+x-x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)}{x^2}$. ……（8分）

设$k(x)=\mathrm{e}^x+x-x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1$，

当$x>1$时，$k'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1>0$，故$k(x)$在$(1,+\infty)$单调递增，

所以$k(x)>k(1)=0$，从而$h'(x)>0$，因此$h(x)$在$(1,+\infty)$单调递增. ……（9分）

又 $x_2>1$，故 $h(x_2)>h(1)=0$，故 $g(x_2)>g\left(\frac{1}{x_2}\right)$，于是 $x_1x_2<1$. ……………………（10 分）

又 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，故 $g(x_1x_2)>g(1)=e+1-a$ ……………………（11 分）

即 $\frac{f(x_1x_2)}{x_1x_2}>\frac{f(1)}{1}=e+1-a$，故 $f(x_1x_2)>(e+1-a)x_1x_2$ ……………………（12 分）

22. 【解析】（1）令 $x=0$，则 $t-t^2=0$，解得 $t=0$ 或 $t=1$（舍）， …………………（1 分）

则 $y=-2+0+0=-2$，即 $B(0,-2)$. …………………（2 分）

令 $y=0$，则 $-2+t+t^2=0$，解得 $t=-2$ 或 $t=1$（舍）， …………………（3 分）

则 $x=-2-(-2)^2=-6$，即 $A(-6,0)$. …………………（4 分）

$\therefore |AB|=\sqrt{(0+6)^2+(-2-0)^2}=2\sqrt{10}$； …………………（5 分）

（2）由（1）可知 $M(-3,-1)$，则以线段 AB 为直径的圆 M 的半径为 $\sqrt{10}$， …………………（7 分）

所以圆 M 的直角坐标方程为 $(x+3)^2+(y+1)^2=10$. …………………（8 分）

由 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 可得，直线 AB 的极坐标方程为 $\rho+6\cos\theta+2\sin\theta=0$. …………………（10 分）

23.【解析】（1）由柯西不等式有

$[(\sqrt{2}a)^2+b^2][(\sqrt{2})^2+1^2]=(2a^2+b^2)(2+1)\ge(2a+b)^2$， ……………………（2 分）

又 $2a^2+b^2=6$，则 $18\ge(2a+b)^2$，当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时，取等号. ……………………（4 分）

$\therefore 2a+b\le 3\sqrt{2}$. ……………………（5 分）

（2）$\because 0<2a+b\le 3\sqrt{2}$，$\therefore \frac{1}{2a+b}\ge\frac{1}{3\sqrt{2}}$， ……………………（6 分）

$\therefore$ 又 $(\frac{2}{a}+\frac{1}{b})(2a+b)=5+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\ge 9$，$\therefore \frac{2}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{9}{2a+b}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}$， ……………………（8 分）

当且仅当 $\frac{2b}{a}=\frac{2a}{b}$，即 $a=b=\sqrt{2}$ 时取等号，

$\therefore \frac{2}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}$. ……………………（10 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。