中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 3 月测试

文科数学试卷（一卷）

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{x|x^2-5x-6\le 0\},B=\{x|y=\log_2(x-2)\}$，则 $A\cap B=$

A．$(2,+\infty)$　　B．$[-1,2)$　　C．$(2,6]$　　D．$[6,+\infty)$

2．设 a,b 表示两条不同的直线，β 表示平面，则下列命题正确的是

A．若 $a\parallel\beta,a\parallel b$，则 $b\parallel\beta$　　B．若 $a\parallel\beta,b\parallel\beta$，则 $a\parallel b$

C．若 $a\perp\beta,a\perp b$，则 $b\parallel\beta$　　D．若 $a\perp\beta,a\parallel b$，则 $b\perp\beta$

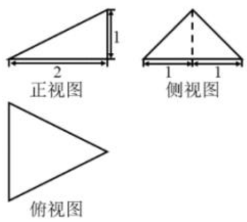
3．已知某圆柱的正视图是边长为 4 的正方形，则该圆柱的表面积为

A．16π　　B．20π　　C．24π　　D．40π

4．已知复数 $z_1=1+\mathrm{i},z_2=\dfrac{z_1+\mathrm{i}}{3-z_1}$（i 为虚数单位），则复数 z_2 的模为

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．4

5．某三棱锥的三视图如图所示（单位：cm），则该三棱锥最长的棱长和体积分别为



（第 5 题图）

A．$\sqrt{5},\dfrac{2}{3}$　　B．$\sqrt{5},\dfrac{5}{6}$

C．$\sqrt{6},\dfrac{2}{3}$　　D．$\sqrt{6},\dfrac{5}{6}$

6．等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为实数，其前 n 项和为 S_n，已知 $S_3=14,S_6=\dfrac{63}{4}$，则 $a_5=$

A．2　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．4　　D．$\dfrac{1}{4}$

7．已知 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)+\cos(\omega x+\varphi),\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2},f(x)$ 是奇函数，直线 $y=-\sqrt{2}$ 与函数 $f(x)$ 的图像的两个相邻交点的横坐标之差的绝对值为 $\dfrac{\pi}{2}$，则

A. $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减　　B. $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{8},\dfrac{3\pi}{8}\right)$ 上单调递减

C. $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增　　D. $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{8},\dfrac{3\pi}{8}\right)$ 上单调递增

8. 已知正实数 a,b,c 满足 $2a+b=1, abc+1=2c$，则 c 的最大值为

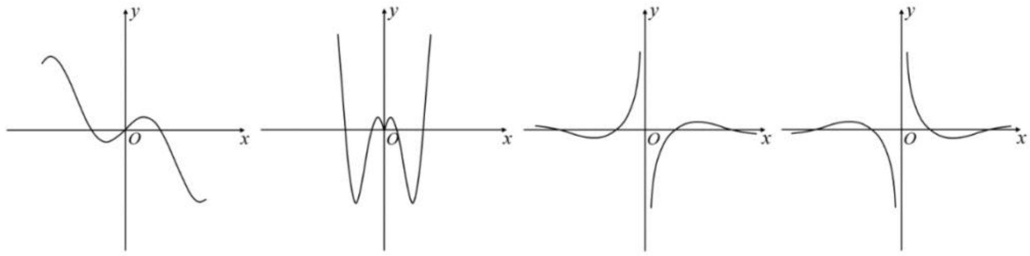
A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{8}{15}$　　D. 2

9. 若函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[a,b]$ 上的值域为 $[t,t+1]\,(t\in\mathbf{R})$，则 $b-a$

A. 有最大值，但无最小值　　B. 既有最大值，也有最小值

C. 无最大值，但有最小值　　D. 既无最大值，也无最小值

10. 下列函数图象中，不可能是函数 $f(x)=x^{\alpha}\cdot\cos x\,(\alpha\in\mathbf{Z},|\alpha|\le 2)$ 的图象是



A　　B　　C　　D

11. 已知向量 $\vec{a}$ 满足 $|\vec{a}|=3$，设 $X=\left\{\vec{x}\,\middle|\,|\vec{x}|=2|\vec{x}-\vec{a}|\right\}, Y=\left\{\vec{y}\,\middle|\,|\vec{y}|=\dfrac{1}{2}|\vec{x}|, <\vec{x},\vec{y}>=\dfrac{\pi}{2}, \vec{x}\in X\right\}$，若 $\vec{m}\in X, \vec{n}\in Y$，则 $|\vec{m}-\vec{n}|$ 的最大值为

A. $\sqrt{5}-\dfrac{3}{2}$　　B. $\sqrt{5}+\dfrac{3}{2}$　　C. $2\sqrt{5}-3$　　D. $2\sqrt{5}+3$

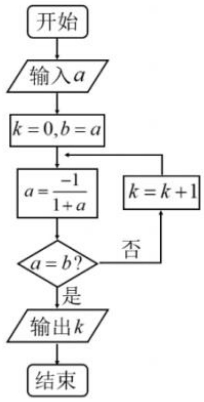
12. 已知直线 $l: y=x+2$，若椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\,(a>1)$ 上的点到直线 l 的距离的最大值与最小值之和为 $2\sqrt{2}$，则椭圆 C 的离心率范围是

A. $\left(0,\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right]$　　B. $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},1\right)$　　C. $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　D. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $a=\log_3 108, 3^b=\dfrac{3}{4}$，则 $a+b=$________.

14．执行如图所示的程序框图，若输入的 a 值为 2，则输出的 k 值为________．



（第 14 题图）

15．在△ABC 中，角 A,B,C 所对的边长分别为 a,b,c，D 为边 BC 上的一点，若 $c=6,b=3\sqrt{2},\sin\angle BAD=\frac{\sqrt{7}}{4},\cos\angle BAC=\frac{\sqrt{2}}{4}$，则 $AD=$________．

16．已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right),F_1,F_2$ 分别是双曲线 C 的左、右焦点，P 为右支上一点 $\left(y_P\neq0\right)$，在线段 PF_1 上取“△PF_1F_2 的周长中点”M，满足 $\left|MP\right|+\left|PF_2\right|=\left|MF_1\right|+\left|F_1F_2\right|$，同理可在线段 PF_2 上也取“△PF_1F_2 的周长中点”N．若△PMN 的面积最大值为 1，则 $b=$________．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

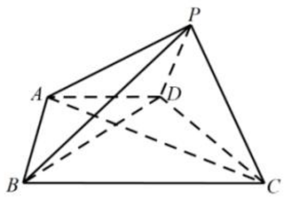
（一）必考题：共 60 分．

17．（12 分）正项数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $2\sqrt{S_n}=a_n+1$．

（1）求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\frac{2}{a_n\cdot a_{n+2}}$，数列 $\left\{b_n\right\}$ 的前 n 项和为 B_n，求证：$B_n<\frac{2}{3}$．

18．（12 分）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是直角梯形，$AD\parallel BC,\angle ABC=\angle DAB=90°,BC=2AB=2AD=2$，平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$．



（第 18 题图）

（1）证明：$BD\perp$ 平面 PCD；

（2）若 $PD=PC=\sqrt{2}$，求三棱锥 $B-ACP$ 的体积．

19．（12 分）学校为方便学生联系家长，在教学楼楼下设了一个公共电话亭，学生依次排队打电话．假设学生打电话所需的时间互相独立，且都是整数分钟，对以往学生打电话所需的时间统计结果如下表：

打电话所需的时间/分	1	2	3	4	5
频率	0.2	0.4	0.25	0.1	0.05

从第一个学生开始打电话时计时.

（1）估计第四个学生恰好等待 5 分钟开始打电话的概率；

（2）Y 表示至第 3 分钟末已打完电话的学生人数，求 Y 的分布列及数学期望.

20. （12 分）已知抛物线 $C: y^2=4x$，A 为抛物线 C 上第一象限内的一点，且在直线 $x=2$ 的右侧，已知点 $M(2,0)$，点 $B(-2,0)$. 连接 BA 交抛物线 C 于点 D.

（1）若 $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$，求 A 点的坐标；

（2）设 AD 的中点为 N，且 $|MN|\geq\frac{1}{2}|AD|$，求△ ADM 面积的最大值.

21. （12 分）已知函数 $f(x)=ax\cdot\ln x$（其中 $a\neq0, a\in\mathbf{R}$），$g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

（1）若存在实数 a 使得 $f(x)<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（2）当 $a\leq\frac{1}{2}$ 时，讨论函数 $y=f(x)-g(x)$ 的零点个数.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．

22. （10 分）[选修 4—4：坐标系与参数方程]

已知直线 $C_1:\begin{cases}x=3+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\end{cases}$（$t$ 为参数），圆 $C_2:\begin{cases}x=2+\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\end{cases}$（$\theta$ 为参数），

（1）当 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时，求 C_1 与 C_2 的交点坐标；

（2）过坐标原点 O 作 C_1 的垂线，垂足为 A，P 为 OA 的中点，当 α 变化时，求 P 点轨迹的参数方程，并指出它是什么曲线.

23. （10 分）[选修 4—5：不等式选讲]

已知 a,b,c 是正数，且满足 $a+b+c=3$，求证：

（1）$a^2+b^2+c^2\geq3\geq ab+bc+ac$；

（2）$\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}\geq3$.

高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》