

咸宁市 2022—2023 学年度下学期高中期末考试

高二数学参考答案

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. C 【解析】 $z=2i+\frac{3}{\sqrt{2}+i}=2i+\sqrt{2}-i=\sqrt{2}+i$,故 $|z|=\sqrt{3}$,选 C.

2. A 【解析】由题可知: $M=(-1,5)$, $N=(0,8)$, $\complement_U N=[-2,0]\cup[8,10]$,则 $M\cap(\complement_U N)=(-1,0]$.

3. B 【解析】若 a,b,c 成等比数列,则 $b^2=ac$;若 $b^2=ac$,令 $a=b=0$,满足 $b^2=ac$,但此时 a,b,c 不构成等比数列,故答案选 B.

4. D 【解析】价格平均 $\bar{x}=\frac{1}{5}(9.6+9.9+10+10.2+10.3)=10$,则 $\bar{y}=40-3.1\times 10=9$,

销售量 $\bar{y}=\frac{1}{5}(10.2+9.3+m+8.4+8.0)=9.0$,解得 $m=9.1$.

5. D 【解析】 $71^9-1=(72-1)^9-1=C_9^0 72^9+C_9^1 72^8\times(-1)+\cdots+C_9^8 72\times(-1)^8+C_9^9(-1)^9-1$
 $=72(C_9^0 72^8+C_9^1 72^7\times(-1)+\cdots+C_9^8(-1)^8)-2$

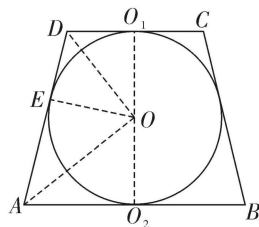
因此 71^9-1 除以 8 的余数为 6. 答案选 D.

6. B 【解析】如图为该几何体的轴截面,其中圆 O 是等腰梯形 $ABCD$ 的内切圆,设圆 O 与梯形的腰相切于点 E ,与上、下底的分别切于点 O_1, O_2 ,设球的半径为 r ,圆台上下底面的半径为 $r_1=2a, r_2=3a$,

注意到 OD 与 OA 均为角平分线,因此 $\angle DOA=90^\circ$,

从而 $\triangle AO_2O \sim \triangle OO_1D$,故 $r^2=r_1r_2=6a^2$,

$$\text{则 } \frac{V_{\text{台}}}{V_{\text{球}}} = \frac{\frac{1}{3} \times 2r \times (\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi r_1 r_2)}{\frac{4}{3} \pi r^3} = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r^2}{2r^2} = \frac{4a^2 + 9a^2 + 6a^2}{12a^2} = \frac{19}{12}.$$



7. D 【解析】 $\ln a=e^{-a}, \ln b=\frac{1}{b}, e^{-c}=c^2$,

作出 $y=e^{-x}, y=\ln x, y=x^2, y=\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上的图象,如图所示,

其中 $e^{-x} < \frac{1}{x}$ 恒成立,故 $y=e^{-x}$ 图象在 $y=\frac{1}{x}$ 的下方,

由图象可知 $c < a < b$. 故选 D.

8. B 【解析】设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$,由 B, C 在 x 轴上方,故 $y_2, y_3 > 0$,

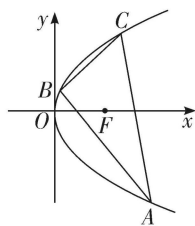
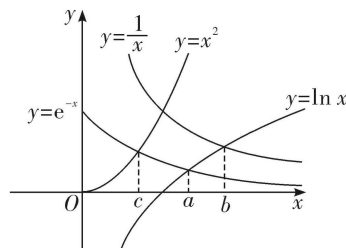
$$k_{BC} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} = \frac{12}{y_2 + y_3}, \text{注意到 } x_1 + x_2 + x_3 = 9, \text{故 } \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{12} = 9,$$

$$\text{即 } y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 108,$$

$$\text{又 } y_1 = -(y_2 + y_3), \text{代入可得 } y_2^2 + y_3^2 + y_2 y_3 = 54,$$

$$\text{故 } (y_2 + y_3)^2 = 54 + y_2 y_3 \leq 54 + \frac{(y_2 + y_3)^2}{4}, \text{即 } \frac{3}{4}(y_2 + y_3)^2 \leq 54, \text{解得 } y_2 + y_3 \leq 6\sqrt{2},$$

$$\text{因而 } k_{BC} = \frac{12}{y_2 + y_3} \geq \frac{12}{6\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$



二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

9. BD 【解析】由 $e^{a-b} \geq 1$ 得 $a \geq b$,令 $a=1, b=-2$ 可知 A, C 错误;

而 $a \geq b, c^2 \geq 0$,因此 $ac^2 \geq bc^2$,故 B 正确;

因为 $f(x)=x|x|$ 在 $\mathbf{R}$ 上为递增函数,由 $a \geq b$ 得 $|a| \geq |b|$,故选项 D 正确.

10. BCD 【解析】由椭圆方程得 $a=2, b=\sqrt{3}, \therefore c=1$,因此 $F_1(-1,0), F_2(1,0)$.

选项 A 中, $a=2, c=1$,故 $e=\frac{1}{2}$,A 错误;

选项 B 中, $|MF_1| \cdot |MF_2| \leq \left(\frac{|MF_1| + |MF_2|}{2}\right)^2 = 4$,当且仅当 $|MF_1| = |MF_2|$ 时取等号,B 正确;

选项 C 中, 令 $M(x, y)$, 则 $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = (x-1, y) \cdot (x+1, y) = x^2 + y^2 - 1 = 3 - \frac{1}{3}y^2 \leq 3$, 故 C 正确;

选项 D 中, 当点 M 为短轴的端点时, $\angle F_1MF_2$ 取得最大值, 此时 $M(0, \sqrt{3})$, 则 $\tan \frac{\angle F_1MF_2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \frac{\angle F_1MF_2}{2} = 30^\circ, \therefore \angle F_1MF_2$ 的最大值为 60° , D 正确.

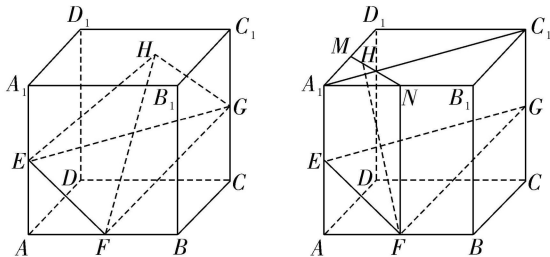
11. AC 【解析】对于选项 A, 当 H 为 C_1D_1 时, E, F, G, H 共面, 故 A 正确;

对于 B 选项, HG 在面 ABB_1A_1 上的投影不可能与 EF 垂直, 因此 HG 不垂直于 EF , 从而 B 错误;

对于 C 选项, 取 A_1D_1, A_1B_1 的中点 M, N , 当 H 在 MN 上时, FH 在面 $A_1B_1C_1D_1$ 上的投影为 NH ,

而 $NH \perp A_1C_1$, 且 $A_1C_1 \parallel EG$, 因此 $FH \perp EG$, 即 H 的轨迹即为 MN , 且其长度为 $MN = 2\sqrt{2}$, 故 C 正确;

对于 D 选项, 由于面 EFG 与面 $A_1B_1C_1D_1$ 不平行, 因此体积不为定值.



12. ABC 【解析】对于 A 选项, 注意到 $f(x)$ 与 $g(x)$ 关于 $y=x$ 对称, 设 d_1 为 A 到直线 $y=x$ 的距离, d_2 为 B 到直线 $y=x$ 的距离, 则 $|AB| \geq d_1 + d_2 \geq 2\min\{d_1, d_2\}$,

注意到, $d_1 = \frac{|e^x - x|}{\sqrt{2}} = \frac{e^x - x}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, d_2 = \frac{|\ln x - x|}{\sqrt{2}} = \frac{x - \ln x}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$,

从而 $|AB| \geq 2\min\{d_1, d_2\} \geq \sqrt{2}$, 当且仅当 $x_1 = 0, x_2 = 1$ 时取到最小值, 故 A 正确;

对于 B 选项, 当直线 OA 与 $y=f(x)$ 相切, 直线 OB 与 $y=g(x)$ 相切时,

此时 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 的夹角为最小, 计算可知 $k_{OA} = e, k_{OB} = \frac{1}{e}$,

设 $a = (1, e), b = (1, \frac{1}{e})$, 则 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{2}{\sqrt{1+e^2} \sqrt{1+\frac{1}{e^2}}} = \frac{2e}{1+e^2}$;

对于 C 选项, 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 当 $k_{OA} < 0$ 时, $k_{OB} = -\frac{1}{k_{OA}} > 0$, 故 $x_2 > 1$;

当 $k_{OA} > 0$ 时, 注意到 $k_{OA} \geq e$, 从而 $k_{OB} = -\frac{1}{k_{OA}} \in [-\frac{1}{e}, 0)$, 也即 $\frac{\ln x_2}{x_2} \geq -\frac{1}{e}$,

构造函数 $h(x) = \frac{\ln x}{x}, h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 故 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 又 $h(\frac{1}{2}) = -2\ln 2 < -\frac{1}{e}$,

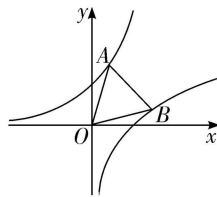
从而 $h(x_2) > h(\frac{1}{2})$, 因此 $x_2 > \frac{1}{2}$,

对于 D 选项, 依题意可知, A, B 两点关于 $y=x$ 对称, 此时 $x_2 = y_1, y_2 = x_1$,

因此 $|AB|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 2(x_1 - y_1)^2 = 2(e^{x_1} - x_1)^2 > 2$,

因此 $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} |AB|^2 > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选 ABC.



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 0.75 【分析】本题考查了条件概率的计算公式, 属于简单题.

【解析】 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, 即 $P(AB) = P(B)P(A|B) = 0.5 \times 0.6 = 0.3$, 故 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$.

14. 2 【解析】直线 l_1 过定点 $A(2, 0)$, l_2 过定点 $B(-2, 0)$,

当 $m \neq 0$ 时, 两直线的斜率分别为 $k_1 = -\frac{1}{m}, k_2 = m, k_1 k_2 = -1$, 故 $AP \perp BP$, 从而 $OP = \frac{1}{2} AB = 2$,

当 $m = 0$ 时, 易求得 $P(2, 0)$, 此时 $|OP| = 2$,

综上所述, $|OP| = 2$.

15. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 【解析】 $g(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) + \omega \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1+\omega^2} \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4} + \varphi\right)$, 其中 $\tan \varphi = 2$,

依题意 $\sqrt{1+\omega^2} = \sqrt{5}$, 故 $\omega = 2$, 此时 $g(x) = \sqrt{5} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4} + \varphi\right)$, 且 $2x_0 + \frac{\pi}{4} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

因此 $f(x_0) = \sin\left(2x_0 + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

16. 4 【解析】易知 $\frac{\ln b}{e^a} < \frac{b^m}{a^m}$ 等价于 $\frac{\ln b}{b^m} < \frac{e^a}{a^m}$.

令 $f(x) = \frac{\ln x}{x^m} (x > 1)$, 则 $f'(x) = \frac{1 - m \ln x}{x^{m+1}}$.

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = e^{\frac{1}{m}}$, 则 $f(x)$ 在 $(1, e^{\frac{1}{m}})$ 上单调递增, 在 $(e^{\frac{1}{m}}, +\infty)$ 上单调递减, 则 $f(x)$ 有最大值 $f(e^{\frac{1}{m}}) = \frac{1}{me}$.

令 $g(x) = \frac{e^x}{x^m} (x > 1)$, 则 $g'(x) = \frac{e^x(x-m)}{x^{m+1}}$. 令 $g'(x) = 0, x = m$.

当 $m = 1$ 时, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上 $\uparrow$, $g(x) > g(1) = e$, 此时 $f(x) \leq \frac{1}{e}$, 必有 $f(b) < g(a)$ 成立.

故考虑 $m \geq 2$, 则 $g(x)$ 在 $(1, m)$ 上单调递减, 在 $(m, +\infty)$ 上单调递增,

故 $g(x)$ 有最小值 $g(m) = \frac{e^m}{m^m}$.

若 $\frac{\ln b}{e^a} < \left(\frac{b}{a}\right)^m$ 成立, 只需 $f(e^{\frac{1}{m}}) < g(m)$, 即 $\frac{1}{me} < \frac{e^m}{m^m}$, 即 $e^{m+1} > m^{m-1}$.

两边取自然对数可得 $m+1 > (m-1) \ln m$, 即求最大的 m 使得 $m+1 > (m-1) \ln m$,

当 $m \geq 2$ 时, 不等式转化为 $\frac{m+1}{m-1} > \ln m$.

令 $\varphi(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$, 本题即求使得 $\varphi(x) > 0$ 的最大的正整数 m .

$\varphi'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} < 0$ 恒成立, 则 $\varphi(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减.

因为 $\varphi(4) = \frac{5}{3} - \ln 4 = \frac{1}{3} \ln \frac{e^5}{64} > 0$, $\varphi(5) = \frac{3}{2} - \ln 5 = \frac{1}{2} \ln \frac{e^3}{25} < 0$,

$\varphi(x) > 0$ 的最大正整数为 4.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 【解析】(1) 依题意, $\sin A = \sin 2B$, 即 $\sin A = 2 \sin B \cos B$,

由正弦定理可知, $a = 2b \cos B$, 即 $\cos B = \frac{3}{4}$,

从而 $\cos A = \cos 2B = 2 \cos^2 B - 1 = \frac{1}{8}$, 故 $\sin A = \frac{3\sqrt{7}}{8}$.

(2) 由(1)可知, $a = 2b \cos B$, 由余弦定理可得: $a = 2b \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$,

即 $a^2 c = a^2 b + c^2 b - b^3$, 则 $a^2(c-b) = b(c^2 - b^2)$, 又 $b \neq c$,

故 $a^2 = bc + b^2$, 从而 $\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$.

18. 【解析】(1) 证明: 取 AB 中点 O , 因为 $PA = PB$, 故 $PO \perp AB$,

又因为 $PC \perp AB$, 从而 $AB \perp$ 面 POC , 即 $AB \perp OC$,

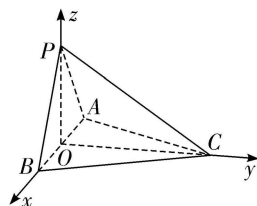
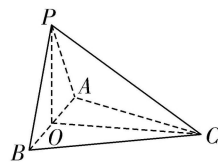
因为 O 为 AB 的中点, 从而 $CA = CB$.

(2) 平面 $PAB \perp$ 平面 ABC , 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABC = AB$, 且 $PO \perp AB$, 故 $PO \perp$ 面 ABC ,

以 O 为坐标原点, $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OP}$ 的方向分别为 x, y, z 轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系,

不妨设 $PA = 2$, 则 $PC = 3$, 而 $PO = \sqrt{3}$, 从而 $OC = \sqrt{6}$,

易得 $A(-1, 0, 0), C(0, \sqrt{6}, 0), B(1, 0, 0), P(0, 0, \sqrt{3})$,



高二数学参考答案 第 3 页

可得 $\overrightarrow{PB} = (1, 0, -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{BC} = (-1, \sqrt{6}, 0)$

设面 PBC 的法向量 $m = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \\ m \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x - \sqrt{3}z = 0 \\ -x + \sqrt{6}y = 0 \end{cases}$,

令 $x = \sqrt{6}$, 则 $m = (\sqrt{6}, 1, \sqrt{2})$,

又 $\overrightarrow{PA} = (1, 0, \sqrt{3})$, 设 PA 与面 PBC 的夹角为 θ ,

则 $\sin \theta = |\cos \langle m, \overrightarrow{PA} \rangle| = \frac{|m \cdot \overrightarrow{PA}|}{|m| \cdot |\overrightarrow{PA}|} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{9} \times \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

19. 【解析】(1) 依题意, 设事件 A : 盒子恰好剩下一个红球, 前三次只能取两种颜色的球, 第四次取第三种颜色的球, 因此

第四次取球只能是红色球或者蓝色球, 从而 $P(A) = \frac{C_2^1 C_2^1 \Lambda_3^2}{\Lambda_5^4} = \frac{1}{5}$.

(2) X 的所有可能取值为 $0, 1, 2$,

$P(X=0) = \frac{\Lambda_4^2 \Lambda_2^2}{\Lambda_5^4} = \frac{1}{5}$, $P(X=1) = 2P(A) = \frac{2}{5}$, $P(X=2) = \frac{C_2^2 C_2^1 \Lambda_3^2}{\Lambda_5^4} = \frac{2}{5}$,

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

$E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$.

20. 【解析】依题意, $S_n = a_n + 2a_{n-1}$ 可知 $S_{n-1} = 2a_{n-1} (n \geq 3)$,

当 $n=3$ 时, 由 $S_2 = 2a_2$, 可知 $a_2 = a_1 = 1$,

由 $S_{n-1} = 2a_{n-1}$, 可得 $S_n = 2a_n$ 两式相减可知, $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-1}$, 即 $a_n = 2a_{n-1} (n \geq 3)$,

因此 $n \geq 2$ 时, $a_n = a_2 \times 2^{n-2} = 2^{n-2}$,

即 $a_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ 2^{n-2}, n \geq 2 \end{cases}$.

(2) 由(1)可知, $S_1 = 1, S_2 = 2$, 当 $n \geq 3$ 时, $S_n = a_n + 2a_{n-1} = 2^{n-2} + 2 \times 2^{n-3} = 2^{n-1}$,

因此 $S_n = 2^{n-1} (\forall n \in \mathbb{N}^*)$,

$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{2S_2} + \frac{1}{3S_3} + \dots + \frac{1}{nS_n} = 1 + \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{3 \times 2^2} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} < 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right)$
 $= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

21. 【解析】(1) 依题意 $b = 2a$, 根据双曲线 C_2 的焦距是双曲线 C_1 的焦距的 $\sqrt{3}$ 倍, 可得 $5a^2 = 15$,

即 $a^2 = 3$, 故双曲线 $C_2: \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1$,

不妨设 $l_1: y = -2x$, 则设 $l: y = -2x + m$,

联立 $\begin{cases} y = -2x + m \\ y = 2x \end{cases}$, 可得 $x_L = \frac{m}{4}$, 联立 $\begin{cases} y = -2x + m \\ x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$, 可得 $x_M = \frac{m^2 + 4}{4m}$,

联立 $\begin{cases} y = -2x + m \\ \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{12} = 1 \end{cases}$, 可得 $x_N = \frac{m^2 + 12}{4m}$,

从而 $\frac{LM}{MN} = \frac{x_M - x_L}{x_N - x_M} = \frac{\frac{m^2 + 4}{4m} - \frac{m}{4}}{\frac{m^2 + 12}{4m} - \frac{m^2 + 4}{4m}} = \frac{1}{2}$.

(2)如图,延长 PA, PB 分别交渐近线于 C, D 两点,由(1)可知 $\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD} = \frac{2}{3}$, 则 $S_{\triangle PAB} = \frac{4}{9} S_{\triangle PCD}$,

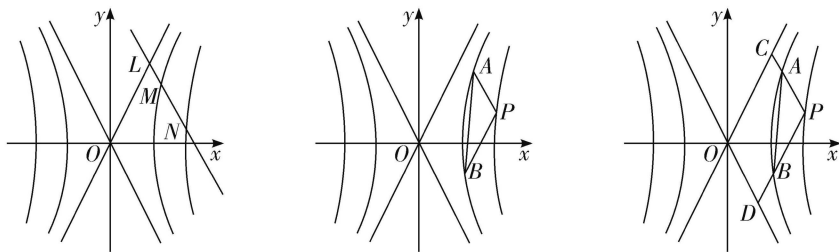
设 $P(x_0, y_0)$, 则 $PA: y = -2(x - x_0) + y_0$, 联立 $\begin{cases} y = -2(x - x_0) + y_0, \\ y = 2x, \end{cases}$ 解得 $x_C = \frac{2x_0 + y_0}{4}$,

而 $PB: y = 2(x - x_0) + y_0$, 联立 $\begin{cases} y = 2(x - x_0) + y_0, \\ y = -2x, \end{cases}$ 解得 $x_D = \frac{2x_0 - y_0}{4}$,

从而 $|PC| \cdot |PD| = \sqrt{5} |x_P - x_C| = \sqrt{5} |x_P - x_D| = 5 \left| \frac{2x_0 - y_0}{4} \right| \cdot \left| \frac{2x_0 + y_0}{4} \right| = \frac{15}{4}$.

设 l_2 的倾斜角为 α , 则 $\tan \alpha = 2$, 而 $\angle APB = \angle COD = 2\alpha$, 故 $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{4}{5}$,

则 $S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} |PC| \cdot |PD| \sin 2\alpha = \frac{3}{2}$, 因此 $S_{\triangle PAB} = \frac{4}{9} S_{\triangle PCD} = \frac{2}{3}$.



22.【解析】(1)当 $x < 0$ 时, $f(x) = -xe^x$, 则 $f'(x) = -(x+1)e^x$, 直线 l 的切线的斜率 $k = -(a+1)e^a$,

设 $g(x) = (x+1)e^x$, $g'(x) = (x+2)e^x$,

当 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x \in (-2, 0)$ 时, $g'(x) > 0$,

因此 $g(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递减, 在 $(-2, 0)$ 上单调递增;

因此 $g(x)_{\min} = g(-2) = -e^{-2}$, 即 $k_{\max} = -g(x)_{\min} = e^{-2}$.

(2)依题意 $l: y = f'(a)(x-a) + f(a) = -(a+1)e^a x + a^2 e^a$,

则切线 l 与 $f(x)$ 在第一象限仅有一个交点,

即方程 $|xe^x| = -(a+1)e^a x + a^2 e^a$ 仅有一个正数解 x_0 ;

即函数 $h(x) = xe^x + (a+1)e^a x - a^2 e^a (x > 0)$ 仅有一个零点,

$h'(x) = (x+1)e^x + (a+1)e^a$, $h''(x) = (x+2)e^x > 0$,

故 $h'(x)$ 单调递增, 则 $h'(0) = 1 + (a+1)e^a$,

由(1)可知 $g(x) = (x+1)e^x$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递减, 在 $(-2, 0)$ 上单调递增;

因此 $h'(0) = g(a) + 1 > 1 - e^{-2} > 0$, 从而 $h'(x) > h'(0) > 0$, 即 $h(x)$ 单调递增;

注意到 $h(0) = -a^2 e^a < 0$, $h\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}} + \frac{2a+2-3a^2}{3} e^a$,

设 $p(a) = \frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}} + \frac{2a+2-3a^2}{3} e^a$, 则 $p'(a) = -\frac{3a^2+4a-4}{3} e^a = -\frac{(a+2)(3a-2)}{3} e^a$,

故 $p(a)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递减, 在 $(-2, 0)$ 上单调递增;

因此 $p(a) \geq p(-2) = \frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}} - \frac{14}{3} e^{-2} = \frac{2}{3} e^{-2} (e^{\frac{8}{3}} - 7) > \frac{2}{3} e^{-2} (e^2 - 7) > 0$,

因此 $h\left(\frac{2}{3}\right) > 0$, 故存在 $x_0 \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$, 使得 $h(x_0) = 0$,

从而 $f(x_0) = x_0 e^{x_0} < \frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线