

高三阶段性考试 数学参考答案(文科)

1. D 【解析】本题考查集合的运算,考查数学运算的核心素养.

因为 $A = \{x | 1 < x < 5\}$, 所以 $A \cap B = \{2, 3, 4\}$.

2. B 【解析】本题考查常用逻辑用语,考查逻辑推理的核心素养.

由 $f(x) = 2$, 解得 $x = 3$ 或 $x = 1$, 即 $f(x) = 2$ 推不出 $x = 3$; 但是由 $x = 3$ 可以得出 $f(x) = 2$, 所以“ $f(x) = 2$ ”是“ $x = 3$ ”的必要不充分条件.

3. C 【解析】本题考查抛物线的性质,考查数学运算的核心素养.

因为抛物线 $C: y = -10x^2$ 的标准方程为 $x^2 = -\frac{1}{10}y$, 所以它的准线方程是 $y = \frac{1}{40}$.

4. B 【解析】本题考查平面向量的夹角,考查数学运算的核心素养.

因为 $a = (x, 1)$, $b = (-2, y)$, 且 $2a + b = (2, 6)$, 所以 $\begin{cases} 2x - 2 = 2, \\ 2 + y = 6. \end{cases}$ 得 $x = 2, y = 4$, 则 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| |b|} = 0$, 即 a 与 b 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

5. C 【解析】本题考查函数的图象与性质,考查直观想象的核心素养.

函数 $f(x) = \frac{3x^3 \cos x}{e^x - e^{-x}}$ 的定义域 $\{x | x \neq 0\}$ 关于原点对称, 且 $f(-x) = \frac{3(-x)^3 \cos(-x)}{e^{-x} - e^x} = -f(x)$, 则 $f(x)$ 为奇函数, 其图象关于原点对称, 排除 B 和 D; 又 $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $3x^3 \cos x > 0$, 且 $e^x > e^{-x}$, 所以 $f(x) > 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内恒成立, 排除 A; 所以只有 C 正确.

6. A 【解析】本题考查解三角形,考查数学运算的核心素养.

因为 $\sin A = \sin B \cos C$, 所以 $a = b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, 整理为 $2a^2 - a^2 + b^2 - c^2$, 即 $a^2 + c^2 = b^2$, 所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

7. A 【解析】本题考查函数的性质,考查数学运算的核心素养.

易知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数, 不等式 $f(2x-1) + f(5x+13) < 0$ 可化为 $f(2x-1) < f(-5x+13)$, 所以 $2x-1 > -5x+13$, 解得 $x > 2$.

8. D 【解析】本题考查双曲线的性质,考查数学运算的核心素养.

因为双曲线 C 的一条渐近线方程为 $bx - 3y = 0$, 所以 $\frac{4b}{\sqrt{9+b^2}} = 2$, 解得 $b = \sqrt{3}$, 所以 $c = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$, 从而 $\frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

9. B 【解析】本题考查三角函数的性质,考查数学运算的核心素养.

对于①, 令 $F(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 4x + \dots + \frac{1}{10} \sin 10x$, 则 $F(-x) = -F(x)$, 所以 $F(x)$ 是奇函数, ①错误;

对于②, 因为 $\sin x, \frac{1}{2} \sin 2x, \frac{1}{3} \sin 3x, \frac{1}{4} \sin 4x$ 都在 $[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$ 上单调递增, 所以 $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x +$

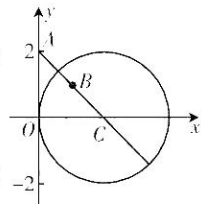
$\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x$ 在 $[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}]$ 上单调递增, ②正确;

对于③, 因为 $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{3}$, 所以 $g(x)_{\max} \geq \frac{2}{3}$, 即 $g(x)$ 的振幅比 $h(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ 的振幅大, 所以③错误;

对于④, 因为 $\varphi(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$ 的周期是 2π , 所以频率 $f_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}$, 而 $h(x)$ 的周期为 π , 频率 $f_2 = \frac{1}{\pi}$, 所以④正确.

10. B 【解析】本题考查圆的性质, 考查直观想象的核心素养.

如图, 当 P 为线段 AB 与圆 C 的交点时, $|PA| + |PB|$ 取得最小值 $\sqrt{2}$, A 正确; 点 B 在圆 C 内, 当 AP 与圆 C 相切时, $\angle PAB$ 最大, 此时 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$, B 错误; 因为 $|PC| = 2$, 所以当 $|PA|$ 最大时, $|PA| - |PC|$ 也最大, 当 A, C, P 三点共线, 且 C 在 A, P 之间时, 其最大值为 $|AC| - 2\sqrt{2}$, C 正确; 当 P 为射线 BC 与圆 C 的交点时, $||PA| - |PB||$ 取得最大值 $|AB| = \sqrt{2}$, D 正确.



11. C 【解析】本题考查三角恒等变换, 考查数学运算的核心素养和化归与转化的数学思想.

因为 $1 - 4\tan \alpha \tan \beta = \frac{1 - \sin^2 \beta + \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta} = 1 + \tan^2 \beta$, 所以 $\tan \beta = -4\tan \alpha$. 又 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, $\alpha\beta \neq 0$, 所以

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-3\tan \alpha}{1 + 4\tan^2 \alpha} = \frac{3}{\frac{1}{-\tan \alpha} + (-4\tan \alpha)}$$

以 $\tan(\alpha + \beta) \leq \frac{3}{4}$.

12. A 【解析】本题考查函数与导数的综合应用, 考查数学抽象的核心素养.

因为 $f(x) = ax^3 + (x-1)e^x$ 在区间 $[1, 3]$ 上不是单调函数, 所以 $f'(x) = 4ax^3 + xe^x = 0$ 在区间 $(1, 3)$ 上有解, 即 $-4a = \frac{e^x}{x^3}$ 在区间 $(1, 3)$ 上有解.

令 $g(x) = \frac{e^x}{x^3}$, 则 $g'(x) = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$. 当 $x \in (1, 2)$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x \in (2, 3)$ 时, $g'(x) > 0$. 故 $g(x)$ 在 $(1, 2)$ 上

单调递减, 在 $(2, 3)$ 上单调递增. 又因为 $g(1) = e$, $g(2) = \frac{e^2}{4}$, $g(3) = \frac{e^3}{9} < e$, 且当 $a = -\frac{e^2}{16}$ 时, $f'(x) = -\frac{e^2}{4}x^3 + xe^x = x^3(\frac{e^x}{x^2} - \frac{e^2}{4}) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[1, 3]$ 上单调递增, 所以 $\frac{e^2}{4} < -4a < e$, 解得 $-\frac{e}{4} < a < -\frac{e^2}{16}$.

13. $\frac{1}{2}$ 【解析】本题考查基本不等式, 考查数学运算的核心素养.

因为 $4ab = 1$, 所以 $a^2 + b^2 \geq 2ab = \frac{1}{2}$.

14. -3 【解析】本题考查线性规划问题, 考查直观想象的核心素养.

画出可行域(图略)知, 当直线 $z = 2x + y$ 过点 $C(-2, 1)$ 时, z 取得最小值 -3.

15. 6:1 【解析】本题考查两条直线的位置关系, 考查直观想象的核心素养.

因为直线 l_1 过点 $P(1, 2)$, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$ ①. 又 l_2 的斜率为 -2, 所以 $\frac{b}{a} = -2$ ②. 联立①②, 解得

$$\begin{cases} a = -2, \\ b = 4. \end{cases} \text{ 因为 } l_2: 2x + y - 4 = 0, \text{ 所以 } \frac{|m+4|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, \text{ 解得 } m = 1 \text{ 或 } m = -9. \text{ 当 } m = 1 \text{ 时, } l_2 \text{ 不经过第一象限, 故 } m = 1.$$



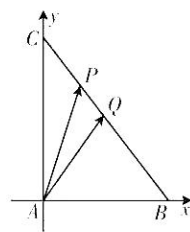
16.72 【解析】本题考查平面向量的数量积,考查数学运算的核心素养.

因为 $AB=6, AC=6\sqrt{3}, BC=12, AB^2+AC^2=BC^2$, 所以 $\angle BAC=90^\circ$, 且 $\angle ACB=30^\circ$. 建立平面直角坐标系 xAy , 如图所示.

设点 $P(x, 6\sqrt{3}-\sqrt{3}x), x \in [0, 2]$, 则 $CP=2x, BQ=6x$, 从而可得 $Q(6-3x, 3\sqrt{3}x)$, 所以

$$\vec{AP} \cdot \vec{AQ} = x(6-3x) + 3\sqrt{3}x(6\sqrt{3}-\sqrt{3}x) = -12(x-\frac{5}{2})^2 + 75.$$

因为 $y = -12(x-\frac{5}{2})^2 + 75$ 在 $[0, 2]$ 上单调递增, 所以当 $x=2$ 时, $\vec{AP} \cdot \vec{AQ}$ 取得最大值, 且最大值为 72.



17. 解: (1) 设公比为 q . 因为 $2a_3$ 是 a_5 与 $-3a_1$ 的等差中项, 所以 $a_5 - 3a_1 = 4a_3$, 1 分

所以 $q^2 - 3q^2 - 4 = 0$, 2 分

解得 $q^2 = 4$, 从而 $q = \pm 2$ 3 分

当 $q=2$ 时, $a_n = 2^{n-1}$; 当 $q=-2$ 时, $a_n = (-2)^{n-1}$.

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{n-1}$ 或 $a_n = (-2)^{n-1}$ 5 分

(2) 当 $a_1=1, q=2$ 时, $S_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$, 6 分

由 $S_m = 2^m - 1 = 127$, 得 $m=7$; 7 分

当 $a_1=1, q=-2$ 时, $S_n = \frac{1-(-2)^n}{1+2} = \frac{1-(-2)^n}{3}$, 8 分

由 $S_m = \frac{1-(-2)^m}{3} = 127$, 化简得 $(-2)^{m-2} = -95$, 无解. 9 分

综上, $m=7$ 10 分

18. 解: (1) 因为 $f(x) = 2x + 1 - 4\ln x$, 所以 $f'(x) = 2 - \frac{4}{x}$ 2 分

所以 $f(1) = 3, f'(1) = -2$ 3 分

所以 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 3 = -2(x - 1)$, 即 $2x + y - 5 = 0$ 5 分

(2) 由 (1) 知 $f'(x) = 2 - \frac{4}{x} = \frac{2(x-2)}{x}, x \in [1, 3]$ 6 分

令 $f'(x) > 0$, 则 $2 < x \leq 3$; 令 $f'(x) < 0$, 则 $1 \leq x < 2$ 7 分

所以 $f(x)$ 在 $[1, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, 3]$ 上单调递增. 8 分

所以 $f(x)_{\min} = f(2) = 5 - 4\ln 2$ 9 分

又 $f(1) = 3, f(3) = 7 - 4\ln 3, f(1) - f(3) = 4(\ln 3 - 1) > 0$, 所以 $f(x)_{\max} = 3$ 11 分

所以 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上的最大值与最小值分别为 3 与 $5 - 4\ln 2$ 12 分

19. 解: (1) 选择①②.

因为函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴的任意两个相邻交点之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

所以最小正周期 $T = \pi = \frac{2\pi}{\omega}$, 解得 $\omega = 2$ 1 分

把 $x = \frac{\pi}{6}$ 代入 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$, 得 $\sin(\frac{\pi}{3} + \varphi) = \pm 1$, 则 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

解得 $\varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 3 分

所以 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 4 分

选择①③.

因为函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴的任意两个相邻交点之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

所以最小正周期 $T = \pi = \frac{2\pi}{\omega}$, 解得 $\omega = 2$ 5 分

把 $x = \frac{\pi}{4}$ 代入 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$, 得 $\sin(\frac{\pi}{2} + \varphi) = 0$, 则 $\frac{\pi}{2} + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

解得 $\varphi = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 φ 无解, 函数 $f(x)$ 不能同时满足①③两个条件. 6 分

选择②③,

由②③两个条件可得 $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{12}$, 即 $T = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\omega = 6$ 7 分

把 $x = \frac{\pi}{6}$ 代入 $f(x) = \sin(6x + \varphi)$, 得 $\sin(\pi + \varphi) = \pm 1$, 则 $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 φ 无解, 函数 $f(x)$ 不能同时满足②③两个条件.

综上, 函数 $f(x)$ 只能同时满足条件①②, 且 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 8 分

(2) 因为 $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$, 所以 $2x + \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$, 10 分

所以 $-\frac{1}{2} \leq \sin(2x + \frac{\pi}{6}) \leq 1$, 11 分

即函数 $f(x)$ 的值域为 $[-\frac{1}{2}, 1]$ 12 分

注: 没有讨论①③, ②③组合的, 本题只能得 8 分.

20. 解: (1) 因为 $e = \frac{1}{2}$, 所以 $a = 2c$ 2 分

又椭圆 C 过点 $P(-2, 0)$, 所以 $a = 2$, 从而 $c = 1$ 3 分

所以 $b = \sqrt{3}$, 椭圆 C 的标准方程是 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 5 分

(2) 显然直线 l 的斜率存在, 设 l 的方程为 $y = k(x + 2)$, $A(x_1, y_1)$ 6 分

联立方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = k(x + 2), \end{cases}$ 消去 y 得 $(3 + 4k^2)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0$, 7 分

所以 $x_1 + (-2) = -\frac{16k^2}{3 + 4k^2}$, $-2x_1 = \frac{16k^3 - 12}{3 + 4k^2}$, 可得 $x_1 = \frac{6 - 8k^2}{3 + 4k^2}$ 8 分

因为 $|PA| = \sqrt{1 + k^2} |\frac{6 - 8k^2}{3 + 4k^2} + 2| = \frac{12\sqrt{1 + k^2}}{3 + 4k^2}$, 10 分

所以 $\frac{12\sqrt{1 + k^2}}{3 + 4k^2} = \frac{12\sqrt{2}}{7}$, 整理得 $32k^4 - k^2 - 31 = 0$ 11 分

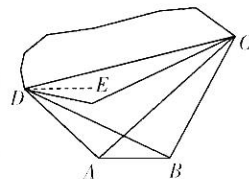
所以 $k^2 = 1$, 解得 $k = \pm 1$, 即直线 l 的斜率为 ± 1 12 分

21. 解: (1) 由已知得 $\angle DAB = 135^\circ$, $\angle DBA = 30^\circ$,

所以 $\angle ADB = 15^\circ$, $\sin \angle ADB = \sin(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ 2 分

在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理得 $BD = \frac{AB \sin \angle DAB}{\sin \angle ADB} = \sqrt{3} + 1$ (km). 3 分

同理, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle CBA = 120^\circ$, $\angle CAB = 45^\circ$, 所以 $\angle ACB = 15^\circ$ 4 分



由正弦定理得 $BC = \frac{AB \sin \angle CAB}{\sin \angle ACB} = \sqrt{3} + 1 (\text{km})$ 6 分

可以计算出 $\angle DAC = \angle DBC = 90^\circ$, 在 $\triangle BCD$ 中, $BC = BD$.

所以 $CD = \sqrt{2} BC = \sqrt{6} + \sqrt{2} (\text{km})$ 8 分

(2) 作 $DE \parallel AB$, 由(1)知 $\angle BDC = 45^\circ$, $\angle BDE = \angle ABD = 30^\circ$ 10 分

所以 $\angle CDE = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$, 即点 C 在点 D 的北偏东 75° 方向上. 12 分

22. (1) 证明: 因为 $f(x) = \frac{x-1}{2(x+1)} - \ln x$,

所以 $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x} = -\frac{x^2+x+1}{x(x+1)^2} < 0$ 2 分

所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

所以 $f(x) < f(1) = 0$ 4 分

(2) 解: $f'(x) = \frac{2a}{(x+1)^2} - \frac{1}{x} = -\frac{x^2-2(a-1)x+1}{x(x+1)^2} (x > 0)$ 5 分

令 $g(x) = x^2 - 2(a-1)x + 1, x > 0$.

当 $a \leq 1$ 时, 因为 $g(0) = 1 > 0$, 所以 $g(x) > 0$ 6 分

当 $1 < a \leq 2$ 时, $\Delta = 4a^2 - 8a \leq 0$, 得 $g(x) \geq 0$ 7 分

所以当 $a \leq 2$ 时, $f'(x) \leq 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 此时 $f(x)$ 至多有 1 个零点. 8 分

当 $a > 2$ 时, $\Delta = 4a^2 - 8a > 0$, 此时 $g(x)$ 有 2 个零点, 设为 t_1, t_2 , 且 $t_1 < t_2$.

因为 $t_1 + t_2 = 2a - 2 > 0, t_1 t_2 = 1$, 所以 $0 < t_1 < 1 < t_2$ 9 分

因为 $f(x)$ 在 $(0, t_1), (t_2, +\infty)$ 上单调递减, 在 (t_1, t_2) 上单调递增, 且 $f(1) = 0$.

所以 $f(t_1) < 0, f(t_2) > 0$ 10 分

又 $f(e^{-a}) = \frac{2a}{1+e^a} > 0, f(e^a) = \frac{-2a}{1+e^a} < 0$, 且 $f(x)$ 的图象连续不断.

所以存在唯一 $x_1 \in (e^{-a}, t_1)$, 使得 $f(x_1) = 0$, 存在唯一 $x_2 \in (t_2, e^a)$, 使得 $f(x_2) = 0$ 11 分

综上, 当 $f(x)$ 有 3 个不同的零点时, $a > 2$, 即 a 的取值范围为 $(2, +\infty)$ 12 分