南京市2023届高三年级期末调研模拟

数学

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若集合 $M=\{x+1|-1\leqslant x<3\}$，$N=\{2^x|0<x\leqslant 2\}$，则 $M\cap N=$

A．$\{x|0\leqslant x<4\}$　　B．$\{x|0<x<4\}$

C．$\{x|1\leqslant x<4\}$　　D．$\{x|1<x<4\}$

2．若复数 z 满足 $|z-\overline{z}|=2$，$z\cdot\overline{z}=3$，则 z^2 的实部为

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

3．若等差数列 $\{a_n\}$ 的前5项和为75，$a_4=2a_2$，则 $a_9=$

A．40　　B．45　　C．50　　D．55

4．已知随机变量 X 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$，且 $P(-1<X\leqslant 2)=3P(X>5)$，则 $P(-1<X\leqslant 5)=$

A．0.5　　B．0.625　　C．0.75　　D．0.875

5．若正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边长为2，$\sum\limits_{i=1}^{n-2}\overrightarrow{A_iA_{i+1}}\cdot\overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}=20\sqrt{3}$，则 $n=$

A．6　　B．8　　C．10　　D．12

6．已知 O 为坐标原点，椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$，$C$ 的两个焦点为 F_1，F_2，A 为 C 上一点，其横坐标为1，且 $|OA|^2=|AF_1|\cdot|AF_2|$，则 C 的离心率为

A．$\dfrac{1}{4}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

7．若 $\sin\alpha=2\sin\beta$，$\sin(\alpha+\beta)\cdot\tan(\alpha-\beta)=1$，则 $\tan\alpha\tan\beta=$

A．2　　B．$\dfrac{3}{2}$　　C．1　　D．$\dfrac{1}{2}$

8．若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{Z}$，且 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)\cdot[f(y)+f(-y)]$，$f(-1)=0$，$f(0)=f(2)=1$，则曲线 $y=|f(x)|$ 与 $y=\log_2|x|$ 的交点个数为

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9．已知点 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(2\cos\beta,\sqrt{3}\sin\beta)$，其中 α，$\beta\in[0,2\pi)$，则

A．点 A 的轨迹方程为 $x^2+y^2=1$　　B．点 B 的轨迹方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

C．$|AB|$的最小值为$\sqrt{3}-1$　　D．$|AB|$的最大值为$\sqrt{3}+1$

10．记函数 $f(x)=\cos(\omega x+\frac{\pi}{4})(\omega>0)$的最小正周期为 T，且$\frac{2n\pi}{3}<T<n\pi(n\in\mathbf{N}^*)$．若 $x=\frac{\pi}{6}$为 $f(x)$的零点，则

A．$\frac{2}{n}<\omega<\frac{3}{n}$　　B．$\omega<\frac{3}{2n-1}$

C．$x=\frac{\pi}{2}$可能为 $f(x)$的零点　　D．$x=\frac{7\pi}{6}$可能为 $f(x)$的极值点

11．对于伯努利数 $B_n(n\in\mathbf{N})$，有定义：$B_0=1$，$B_n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^kB_k(n\geqslant2)$．则

A．$B_2=\frac{1}{6}$　　B．$B_4=\frac{1}{30}$　　C．$B_6=\frac{1}{42}$　　D．$B_{2n+3}=0$

12．已知函数 $f(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$，$g(x，n)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(x+i)(n\geqslant2)$，则

A．$g(x，4n)=0$　　B．$g(x，4^n+2^n)+f(x)=0$

C．$g(x+1，nf(n))+f(x)=0$　　D．$g(x+n，nf(n))+f(x)=0$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．小颖和小星在玩抽卡游戏，规则如下：桌面上放有 5 张背面完全相同的卡牌，卡牌正面印有两种颜色的图案，其中一张为紫色，其余为蓝色．现将这些卡牌背面朝上放置，小颖和小星轮流抽卡，每次抽一张卡，并且抽取后不放回，直至抽到印有紫色图案的卡牌停止抽卡．若小颖先抽卡，则小星抽到紫卡的概率为__________．

14．已知 O 为坐标原点，抛物线 C：$y=\frac{1}{4}x^2$的焦点为 F，过点 O 的直线与 C 交于点 A，记直线 OA，FA 的斜率分别为 k_1，k_2，且 $k_1=3k_2$，则$|FA|=$__________．

15．在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，平面 $PAB\perp$平面 PCD，则 $P-ABCD$ 体积的最大值为__________．

16．若函数 $f(x)=ae^x-\sin x$，$g(x)=ae^x-x\sin x$，且 $f(x)$和 $g(x)$在$[0，\pi]$一共有三个零点，则 $a=$__________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）

设$(X，Y)$是一个二维离散型随机变量，其所有可能取值为$(a_i，b_j)$，其中 $i，j\in\mathbf{N}^*$．记 $p_{ij}=P(X=a_i，Y=b_j)$是随机变量$(X，Y)$的联合分布列．与一维的情形相似，二维分布列可以如下形式表示：

数学试题第 2 页（共 5 页）

$(X，Y)$	b_1	b_2	…
a_1	p_{11}	p_{12}	…
a_2	p_{21}	p_{22}	…
…	…	…	…

现将 3 张卡片等可能地放入 A，B 两盒，记 A 盒中的卡片数为 X，B 盒中的卡片数为 Y，求$(X，Y)$的联合分布列.

18.（12 分）

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB_1}=4$，$AC_1=\sqrt{6}$.

（1）求四面体 ACB_1D_1 体积的最大值；

（2）若二面角 $B-AC-D_1$ 的正弦值为$\frac{\sqrt{5}}{3}$，求 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积.

19.（12 分）

记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，分别以 a，b，c 为直径的三个圆的面积依次为 S_1，S_2，S_3．已知 $S_1+S_2-S_3=A+B$.

（1）若 $C=\frac{\pi}{4}$，求△ABC 的面积；

（2）若△ABC 的面积为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，求△ABC 周长的最小值.

20.（12 分）

已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足$a_1=b_1=1$，$\{\frac{a_n}{b_n}\}$是公差为 1 的等差数列，$\{b_{n+1}-b_n\}$是公差为 2 的等差数列.

（1）若$b_2=2$，求$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）若$b_2\in\mathbf{N}^*$，$a_n\geqslant a_{b_2}$，证明：$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}<3$.

21.（12 分）

已知双曲线 C：$x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的准线方程为$x=\pm\frac{1}{2}$，$C$ 的两个焦点为 F_1，F_2.

（1）求 b；

（2）若直线 l 与 C 相切，切点为 A，过 F_2 且垂直于 l 的直线与 AF_1 交于点 B，证明：点 B 在定曲线上.

22.（12 分）

已知函数$f(x)=ax^2+\ln x$，$g(x)=2x+\frac{a}{2}\ln x$.

（1）若$f(x)\geqslant g(x)$，求 a 的取值范围；

（2）记$f(x)$的零点为x_1，$x_2(x_1<x_2)$，$g(x)$的极值点为x_0，证明：$\frac{x_1}{x_2}>4ex_0$.

南京市 2023 届高三年级期末调研模拟

数 学

选择题

1	2	3	4	5	6	7	8
D	C	B	C	D	D	A	B

选择题

9	10	11	12
ABC	ABD	ACD	ACD

填空题

13	$\frac{2}{5}$	14	$\frac{5}{2}$
15	$\frac{4}{3}$	16	$\frac{\sin 1}{e}$或$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$

解答题

17．**解：**

由题意，(X, Y)的所有可能取值为$(0, 3)$，$(1, 2)$，$(2, 1)$，$(3, 0)$，

且$p_{03}=p_{30}=C_3^0\times(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$，$p_{12}=p_{21}=C_3^1\times(\frac{1}{2})^3=\frac{3}{8}$，

所以(X, Y)的联合分布列为：

(X, Y)	3	2	1	0
3	—	—	—	$\frac{1}{8}$
2	—	—	$\frac{3}{8}$	—
1	—	$\frac{3}{8}$	—	—
0	$\frac{1}{8}$	—	—	—

18．**解：**

（1）

设$AB=a$，$BC=b$，$BB_1=c$，

且$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB_1}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB_1}|\cdot\cos\angle CAB_1$，

由余弦定理得：$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB_1}=a^2=4$，则$a=2$，

又 $AC_1=\sqrt{6}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，所以 $b^2+c^2=2$，

且 $V_{ACB_1D_1}=\frac{2}{3}bc\leq\frac{2}{3}\times\frac{b^2+c^2}{2}=\frac{2}{3}$，

即四面体 ACB_1D_1 体积的最大值为$\frac{2}{3}$；

（2）

过点 D 作 AC 的垂线，垂足为 E，连接 D_1E，

因为 $DD_1\perp$平面 $ABCD$，$AC\subset$平面 $ABCD$，

所以 $DD_1\perp AC$，且 $AC\perp DE$，

又 $DE\cap DD_1=D$，DE，$DD_1\subset$平面 DED_1，

所以 $AC\perp$平面 DED_1，且 $D_1E\subset$平面 DED_1，

所以 $AC\perp D_1E$，即$\angle DED_1$为二面角 $D-AC-D_1$ 的平面角，

记二面角 $B-AC-D_1$ 的平面角为 θ，

则二面角 $D-AC-D_1$ 的平面角为 $\pi-\theta$，

所以 $\sin\theta=\frac{DD_1}{D_1E}=\frac{\sqrt{6c^2-c^4}}{\sqrt{-c^4+2c^2+8}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

则$(c^2-1)(c^2-10)=0$，且 $c^2<2$，所以 $c=1$，

且 $V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=2bc=2$，

所以 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 2.

19．**解**：

（1）

记$\triangle ABC$ 的面积为 S，

因为 $S_1+S_2-S_3=\frac{\pi}{4}(a^2+b^2-c^2)=A+B=\pi-C=\frac{3\pi}{4}$，

由余弦定理，则 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C=\sqrt{2}ab=3$，

所以 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{3}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{4}$；

（2）

因为 $ab=\frac{2(\pi-C)}{\pi\cos C}>0$，所以 $0<C<\frac{\pi}{2}$，

且 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\pi-C}{\pi}\tan C\triangleq f(C)$，

又 $f'(C)=-\frac{\tan C}{\pi}+\frac{\pi-C}{\pi\cos^2C}>0$，所以 $f(C)$在$(0，\frac{\pi}{2})$单调递增，

且$f(C)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，从而$C=\frac{\pi}{3}$，$ab=\frac{8}{3}$，

由余弦定理，$2ab\cos C=a^2+b^2-c^2=\frac{8}{3}$，

所以$c^2=a^2+b^2-\frac{8}{3}\geqslant 2ab-\frac{8}{3}=\frac{8}{3}$，即$c\geqslant\frac{2\sqrt{6}}{3}$，

且$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，当且仅当$a=b=c=\frac{2\sqrt{6}}{3}$时，取等号，

所以$\triangle ABC$周长的最小值$3\times\frac{2\sqrt{6}}{3}=2\sqrt{6}$.

20．**解：**

（1）

因为$\frac{a_1}{b_1}=1$，$\{\frac{a_n}{b_n}\}$是公差为1的等差数列，

所以$\frac{a_n}{b_n}=n$，即$a_n=nb_n$，

且$b_2-b_1=1$，所以$b_{n+1}-b_n=2n-1$，

累加得$b_{n+1}-b_1=n^2$，所以$b_n=(n-1)^2+1$，

则$a_n=nb_n=n^3-2n^2+2n$；

（2）

因为$b_{n+1}-b_n=2n+b_2-3$，

累加得$b_{n+1}-b_1=n^2-2n+nb_2$，所以$b_n=n^2-4n+4+(n-1)b_2$，

则$a_n=n^3-4n^2+4n+n(n-1)b_2$，

则$a_1=1$，$a_{b_2}=2-5+4b_2\triangleq f(b_2)$，

且$f'(b_2)=6-10b_2+4\geqslant 0$，

所以$a_{b_2}\geqslant a_1$，且$a_1\geqslant a_{b_2}$，所以$b_2=1$，

所以$b_n=n^2-3n+3$，

且$b_1=b_2=1$，$b_n=n^2-3n+3>n^2-3n+2$，

从而$\frac{1}{b_n}=\frac{1}{n^2-3n+3}<\frac{1}{n^2-3n+2}=\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}(n\geqslant 3)$，

所以$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}<3-\frac{1}{n-1}<3(n\geqslant 3)$，

当$n=1$时，$\frac{1}{b_1}=1<3$，$n=2$时，$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}=2<3$，

所以$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}<3$.

21．**解：**

（1）

设 C 的半焦距为 c，且 C 的准线方程为 $x=\pm\frac{1}{2}$，

所以$\frac{1}{2}=\frac{a^2}{c}=\frac{1}{c}$，即 $c=2$，所以 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{3}$；

（2）

由（1）知 C：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$，设点 $A(x_0, y_0)$，$F_1(-2, 0)$，$F_2(2, 0)$，

首先证明：l：$x_0x-\frac{y_0y}{3}=1$，并将 l 斜率不存在的情况舍弃，

联立 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 消去 x 得：$y^2-2y_0y+3x_0^2-3=0$，

且 $\Delta=4y_0^2-4(3x_0^2-3)=0$，所以 l：$x_0x-\frac{y_0y}{3}=1$，即 $y=\frac{3x_0}{y_0}x-\frac{3}{y_0}$，

所以直线 F_2B：$y=-\frac{y_0}{3x_0}(x-2)$，F_1A：$y=\frac{y_0}{x_0+2}(x+2)$，

联立直线 F_2B，F_1A，解得 $B(\frac{2-2x_0}{1+2x_0}, \frac{2y_0}{1+2x_0})$，且$\frac{2-2x_0}{1+2x_0}\neq-1$，

注意到$(x_0+2)^2+y_0^2=(2x_0+1)^2$，且$\frac{2-2x_0}{1+2x_0}+2=\frac{4+2x_0}{1+2x_0}$，

从而$(\frac{4+2x_0}{1+2x_0})^2+(\frac{2y_0}{1+2x_0})^2=4$，

所以点 B 的轨迹方程为$(x+2)^2+y^2=4$，其中 $x\neq-1$，

即点 B 在定曲线上．

22．**解**：

（1）

记 $h(x)=f(x)-g(x)=(1-\frac{a}{2})\ln x+ax^2-2x\geqslant0$，

①当 $a\leqslant2$ 时，取 $f(\frac{1}{2})<0$，不符条件；

②当 $a>2$ 时，$h'(x)=\dfrac{2ax^2-2x+1-\frac{a}{2}}{x}=\dfrac{(2x-1)(ax-1+\frac{a}{2})}{x}$，

令 $h'(x)<0$，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$在$(0, \frac{1}{2})$单调递减，在$(\frac{1}{2}, +\infty)$单调递增，

所以 $h(\frac{1}{2})=(\frac{a}{2}-1)\ln2+\frac{a}{4}-1\geqslant0$，即 $a\geqslant\frac{4+4\ln2}{1+2\ln2}$，

则 a 的取值范围为$[\frac{4+4\ln2}{1+2\ln2}, +\infty)$；

（2）

因为 $g'(x)=2+\frac{a}{2x}$，令 $g'(x)=0$，则 $x_0=-\frac{a}{4}$，$4ex_0=-ea$，

且 $f'(x)=2ax+\frac{1}{x}$，令 $f'(x)>0$，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$在$(0,\sqrt{-\frac{1}{2a}})$单调递增，在$(\sqrt{-\frac{1}{2a}},+\infty)$单调递减，

且 $f(\sqrt{-\frac{1}{2a}})=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(-\frac{1}{2a})>0$，所以 $-\frac{1}{2e}<a<0$，

取 $x=1$，则 $f(1)=a<0$，所以 $1<x_1<\sqrt{e}<\sqrt{-\frac{1}{2a}}<x_2$，

取 $x=-\frac{1}{ea}$，则 $f(-\frac{1}{ea})=\frac{1}{e^2a}+\ln(-\frac{1}{ea})$，记 $t=-\frac{1}{ea}$，$0<t<2$，

所以 $f(t)=\ln t-\frac{t}{e}$，且 $f'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{e}>0$，所以 $f(t)$在$(0,2)$单调递减，

所以 $f(t)<0$，从而$\frac{x_1}{x_2}>\frac{1}{x_2}>-ea=4ex_0$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。