2023年甘肃省第三次高考诊断考试·理科数学参考答案

1. 选 B　$B=\{x|x>3\}$，$\complement_U B=\{x|x\leqslant 3\}$，$A\cap(\complement_U B)=\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$. 故选 B.

2. 选 A　由题意可得 $z=\frac{3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(3+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=\frac{4-2\mathrm{i}}{2}=2-\mathrm{i}$，则 $z-\bar{z}=-2\mathrm{i}$. 故选 A.

3. 选 D　由题意，得 $\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=\bar{x}_1$，$x_9=1$，$x_{10}=2\bar{x}_1-1$，则 $\sum_{i=1}^{10}x_i=10\bar{x}_1$，故 $\bar{x}_2=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_i=\frac{1}{8}\left(\sum_{i=1}^{10}x_i-x_9-x_{10}\right)=\frac{1}{8}(10\bar{x}_1-1-2\bar{x}_1+1)=\bar{x}_1$，∵$x_9$，$x_{10}$ 是波动幅度最大的两个点的值，则去除 x_9，x_{10} 这两个数据后，整体波动性减小，故 $s_1^2>s_2^2$. 故选 D.

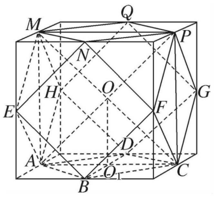
4. 选 A　由题意知平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=5$，$AD=3$，得 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AC}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2)=\frac{1}{2}(9-25)=-8$. 故选 A.

5. 选 A　函数 $f(x)=\cos x+x\sin x-1$ 的定义域为 $[-\pi,\pi]$，且 $f(-x)=\cos x+(-x)\sin(-x)-1=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是偶函数，又 $f(0)=\cos 0+0\cdot\sin 0-1=0$，$f(\pi)=\cos\pi+\pi\cdot\sin\pi-1=-2<0$，$f'(x)=x\cdot\cos x$，当 $x>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减. 故选 A.

6. 选 B　∵$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，$\omega>0$，且 $\frac{\pi}{2}<T<\pi$，∴$\frac{\pi}{2}<\frac{2\pi}{\omega}<\pi$，即 $2<\omega<4$. ∵$y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{9}$ 对称，即 $\frac{5\pi}{9}\omega-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\omega=\frac{6+9k}{5}(k\in\mathbf{Z})$. 又 $2<\omega<4$，∴$k=1$，$\omega=3$. ∴$f(x)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)+1$，将 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $m(m>0)$ 个单位长度后得到 $f(x-m)=\sin\left(3x-3m-\frac{\pi}{6}\right)+1$ 的图象. ∵$f(x-m)$ 的图象关于 y 轴对称，∴$-3m-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，解得 $m=-\frac{2\pi}{9}-\frac{k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，∵$m>0$，∴令 $k=-1$，得 $m_{\min}=-\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{9}$. 故选 B.

7. 选 C　由题意可知，程序框图的功能为计算 $S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}$ 的值，裂项求和，得 $S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}=\frac{5}{6}$，解得 $n=5$，代入检验可知，判断框中应填 $n>5$. 故选 C.

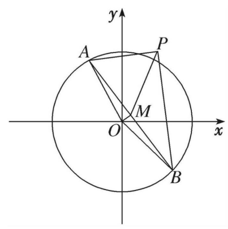
8. 选 D　设 $AB=a$，则二十四等边体的表面积为 $S=6a^2+8\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=12+4\sqrt{3}$，解得 $a=\sqrt{2}$，故 A 错误；如图，在正方体中，取正方体、正方形 $ABCD$ 的中心 O，O_1，连接 OO_1，OA，因为 $AB=\sqrt{2}$，所以正方体的棱长为 2，故 $OO_1=O_1A=1$，可得 $OA=\sqrt{OO_1^2+O_1A^2}=\sqrt{2}$，根据对称性可知，点 O 到该半正多面体的顶点的距离相等，则该半正多面体外接球的球心为 O，半径 $R=OA=\sqrt{2}$，故该半正多面体外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=4\pi\times(\sqrt{2})^2=8\pi$，所以 D 正确；因为 $BC\,/\!/\,NP$，$\triangle NPF$ 为等边三角形，所以 $\angle PNF=\frac{\pi}{3}$，所以 BC 与 NF 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，故 B 错误；在与 AB 相交的 6 条棱中，与 AB 所成的角是 $\frac{\pi}{3}$ 的棱有 4 条，又这 4 条棱中，每一条棱都有 3 条平行的棱，故与 AB 所成的角是 $\frac{\pi}{3}$ 的棱共有 16 条，故 C 错误. 故选 D.



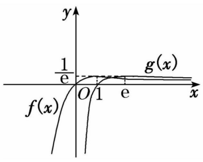
9. 选 C　显然直线 $y=\sqrt{3}x$ 与 F_1F_2 交于原点 O，由椭圆对称性知，若四边形 AF_1BF_2 是矩形，则 $|AB|=|F_1F_2|$，则 $\triangle AOF_2$ 为等边三角形，所以 $|AF_2|=c$，在 $\mathrm{Rt}\triangle F_1F_2A$ 中，$|F_1A|=\sqrt{3}c$，由椭圆定义知 $|AF_1|+|AF_2|=\sqrt{3}c+c=2a$，则 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$.

10. 选 D　第 6 行的第 7 个数为 1，第 7 行的第 7 个数为 7，第 8 行的第 7 个数为 28，它们之和等于 36，第 9 行的第 8 个数也是 36，A 正确；第 2 023 行是二项式 $(a+b)^{2\,023}$ 的展开式的系数，故第 2 023 行中第 $\frac{2\,023+1}{2}=1\,012$ 和第 1 013 个数相等，B 正确；"杨辉三角"第 n 行是二项式 $(a+b)^n$ 的展开式的系数，所以 $a_i=\mathrm{C}_n^{i-1}$，$\sum_{i=1}^{n+1}(2^{i-1}a_i)=\sum_{i=1}^{n+1}(2^{i-1}\cdot\mathrm{C}_n^{i-1})=2^0\mathrm{C}_n^0+2^1\mathrm{C}_n^1+2^2\mathrm{C}_n^2+\cdots+2^{n-1}\cdot\mathrm{C}_n^{n-1}+2^n\mathrm{C}_n^n=(1+2)^n=3^n$，C 正确；第 34 行是二项式 $(a+b)^{34}$ 的展开式的系数，所以第 15 个数与第 16 个数之比为 $\mathrm{C}_{34}^{14}:\mathrm{C}_{34}^{15}=3:4$，D 不正确.

11. 选 B　如图所示，设 AB 的中点为 M，连接 PM，因为点 $P(1,2)$ 在以 AB 为直径的圆上，所以 $PA\perp PB$，所以 $|AM|=|BM|=|PM|=\frac{1}{2}|AB|$，连接 AO，BO，MO，则 $|AO|=|BO|=2$，所以 $OM\perp AB$，所以 $|OM|^2+|AM|^2=|OM|^2+|PM|^2=|OA|^2=4$，设 $M(x,y)$，则 $x^2+y^2+(x-1)^2+(y-2)^2=4$，整理得 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{3}{4}$，所以点 M 的轨迹是以点 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 为圆心，$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 为半径的圆，因为 $|AB|=2|PM|$，所以当 $|PM|$ 取最大值时，$|AB|$ 取最大值，又因为 $|PM|_{\max}=\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+(2-1)^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$，故 $|AB|$ 的最大值为 $\sqrt{5}+\sqrt{3}$. 故选 B.



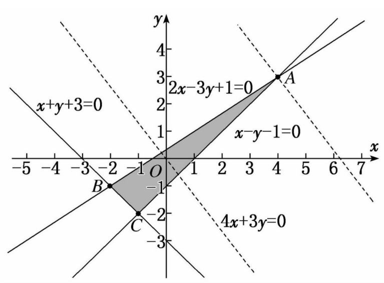
12. 选 B　由 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$，得 $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$，所以当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取最大值，$f(x)_{\max}=f(1)=\dfrac{1}{e}$，当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，当 $x<0$ 时，$f(x)<0$，$f(0)=0$，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)<0$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)>0$，根据以上信息，画出函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ 的大致图象；由 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$，得 $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=e$，所以当 $x\in(0,e)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以当 $x=e$ 时，函数 $g(x)$ 取最大值，$g(x)_{\max}=g(e)=\dfrac{1}{e}$. 当 $x>1$ 时，$g(x)>0$，当 $0<x<1$ 时，$g(x)<0$，$g(1)=0$，当 $x\to0$ 时，$g(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to0$，根据以上信息，画出函数 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$ 的大致图象. 所以若存在直线 $y=b$，其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象共有三个不同的交点，结合图象可得 x_1,x_2 是直线 $y=b$ 与 $y=f(x)$ 图象的两个交点的横坐标，x_2,x_3 是直线 $y=b$ 与 $y=g(x)$ 图象的两个交点的横坐标，则



$$\begin{cases}f(x_1)=\dfrac{x_1}{e^{x_1}}=b,\\ f(x_2)=\dfrac{x_2}{e^{x_2}}=b,\\ g(x_2)=\dfrac{\ln x_2}{x_2}=b,\\ g(x_3)=\dfrac{\ln x_3}{x_3}=b,\end{cases}$$

因为 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$，$g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，所以 $g(x)=f(\ln x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $g(x_2)=f(\ln x_2)=b$，$g(x_3)=f(\ln x_3)=b$，所以 $f(x_1)=f(x_2)=f(\ln x_2)=f(\ln x_3)$，$0<x_1<x_2<e<x_3$，又 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $x_1=\ln x_2$，$x_2=\ln x_3$，所以 $x_1x_3=\ln x_2\cdot e^{x_2}$，又因为 $\dfrac{x_2}{e^{x_2}}=\dfrac{\ln x_2}{x_2}=b$，所以 $\ln x_2\cdot e^{x_2}=x_2^2$，所以 $x_1x_3=x_2^2$. 故选 B.

13. **解析**：$4x+3y=0$，即 $y=-\dfrac{4}{3}x$，$z=4x+3y$，即 $y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{z}{3}$，



画出可行域如图中阴影部分（含边界）所示，平移直线 $4x+3y=0$，

当 $z=4x+3y$ 表示的直线经过点 A 时 z 取得最大值，

联立 $\begin{cases}2x-3y+1=0,\\ x-y-1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4,\\ y=3,\end{cases}$

即 $A(4,3)$，所以 $z_{\max}=4\times4+3\times3=25$.

答案：25

14. **解析**：由正弦定理，得 $a^2c=2a$，则 $ac=2$，

又 $a^2+2ac+c^2=b^2+6$，即 $a^2+c^2-b^2=-2ac+6=2$，

所以 $S=\sqrt{\dfrac{1}{4}\times(4-1)}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

15. **解析**：因为 $x(2k-\ln x)<\ln x+4$ 对于任意 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，等价于 $2k<\dfrac{\ln x+4}{x}+\ln x$ 对于任意 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

令 $f(x)=\dfrac{\ln x+4}{x}+\ln x$，$x\in(1,+\infty)$，则 $f'(x)=\dfrac{x-\ln x-3}{x^2}$，

令 $g(x)=x-\ln x-3$，$x\in(1,+\infty)$，则 $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，又 $g(4)=1-\ln4<0$，$g(5)=2-\ln5>0$，

所以 $g(x)=0$ 在 $(4,5)$ 有且仅有一个根 x_0，满足 $x_0-\ln x_0-3=0$，即 $\ln x_0=x_0-3$，

当 $x\in(1,x_0)$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减，

$x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)=\dfrac{\ln x_0+4}{x_0}+\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0}+x_0-3=x_0+\dfrac{1}{x_0}-2$，

由对勾函数可知 $4+\dfrac{1}{4}-2<x_0+\dfrac{1}{x_0}-2<5+\dfrac{1}{5}-2$，即 $\dfrac{9}{4}<f(x_0)<\dfrac{16}{5}$，

因为 $2k<f(x_0)$，所以 $\dfrac{9}{8}<\dfrac{f(x_0)}{2}<\dfrac{8}{5}$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $k\leqslant1$.

故整数 k 的最大值为 1.

答案：1

16. **解析**：设圆柱的底面半径为 r，高为 h，则由相似可得 $\dfrac{r}{\frac{a}{2}}=\dfrac{a-h}{a}$，即 $h=a-2r$. 令 $h>0$，结合 $r>0$，则 $0<r<\dfrac{a}{2}$，

圆柱的体积 $V=\pi r^2h=\pi r^2(a-2r)=a\pi r^2-2\pi r^3$，

$V'=2a\pi r-6\pi r^2=2\pi r(a-3r)$，

当 $r\in\left(0,\dfrac{a}{3}\right)$，$V$ 单调递增；当 $r\in\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{2}\right)$，$V$ 单调递减.

所以当 $r=\dfrac{a}{3}$ 时，$V_{\max}=\dfrac{\pi a^3}{27}$.

答案：$\dfrac{\pi a^3}{27}$

17. **解**：(1)证明：当 $n=1$ 时，$S_1=a_2-2$，解得 $a_2=3$. ……1 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=a_{n+1}-1-n$，$S_{n-1}=a_n-n$，

两式相减得 $a_n=a_{n+1}-a_n-1$，

即 $a_{n+1}=2a_n+1$，……3 分

所以 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$.

由 $a_2=3$，得 $a_2+1=4$，

所以 $\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，……4 分

由 $a_1=1$，得 $a_1+1=2$，……5 分

所以数列 $\{a_n+1\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列.

……6 分

(2)由(1)知 $a_n+1=2^n$，所以 $b_n=\dfrac{n}{a_n+1}=\dfrac{n}{2^n}$.

……7 分

所以 $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}$，①

$2S_n=1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}$，②

……8 分

②−①，得 $S_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n}{2^n}$……9 分

$=\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$.……12 分

18. **解**：(1)证明：连接 AC 交 BD 于点 O，连接 PO，

因为 $PB=PD$，所以 $PO\perp BD$.……2 分

因为底面 $ABCD$ 为菱形，所以 $CO\perp BD$.……3 分

又 $PO\cap CO=O$，所以 $BD\perp$ 平面 PCO，……4 分

又 $PC\subset$ 平面 PCO，所以 $BD\perp PC$.……6 分

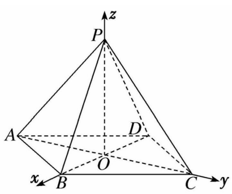
(2)因为 $AB=BD=2$，底面 $ABCD$ 为菱形，所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形，所以 $AO=\sqrt{3}$，

在等边三角形 PBD 中，$BD=2$，所以 $PO=\sqrt{3}$，

因为 $PO^2+AO^2=3+3=6=PA^2$，所以 $AO\perp PO$，

又因为 $PO\perp BD$，$AO\cap BD=O$，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.……7 分

以 O 为原点，OB，OC，OP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $P(0,0,\sqrt{3})$，$B(1,0,0)$，$A(0,-\sqrt{3},0)$，$D(-1,0,0)$，$\overrightarrow{PA}=(0,-\sqrt{3},-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3},0)$.

易知平面 ABD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，……8 分

设平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}=-\sqrt{3}y-\sqrt{3}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$

令 $y=1$，则 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},1,-1)$.……10 分

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-1|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

故平面 PAB 与平面 ABD 所成二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

……12 分

19. **解**：(1)由题意，得 $(0.006+0.010+a+0.018+0.020+0.032)\times 10=1$，解得 $a=0.014$.……2 分

(2)由频率分布直方图，得满意度得分在 60 分及以上的频率是 $1-(0.006+0.014)\times 10=0.8$，……4 分

∴满意度得分在 60 分及以上的人数约为 $5\ 000\times 0.8=4\ 000$.……6 分

(3)∵得分在[80,90)与[90,100]的旅行者比例为 2∶1，

∴从得分在 80 分及以上的旅行者中抽取 1 人，此人得分在[90,100]的概率为 $\dfrac{1}{3}$，

∵抽取 3 人，得分在[90,100]中的人数为 X，

∴$X\sim B\left(3,\dfrac{1}{3}\right)$，……7 分

则 $P(X=k)=C_3^k\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^k\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3-k}$，$k=0,1,2,3$，

……10 分

∴X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{8}{27}$	$\dfrac{4}{9}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{1}{27}$

……11 分

∴$E(X)=3\times\dfrac{1}{3}=1$.……12 分

20. **解**：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=2\ln x+x^2-x$，$f'(x)=\dfrac{2}{x}+2x-1(x>0)$，……1 分

所以 $f'(1)=2+2-1=3$，$f(1)=0$.……3 分

所以函数 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=3(x-1)$，即 $3x-y-3=0$.……4 分

(2)证明：$f'(x)=\dfrac{2}{x}+2ax-a=\dfrac{2ax^2-ax+2}{x}=0$，

即 $2ax^2-ax+2=0$ 有两个不等正实根 x_1，x_2，

则 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=a^2-16a>0,\end{cases}$ 解得 $a>16$.

所以 $x_1+x_2=\dfrac{1}{2}$，$x_1x_2=\dfrac{1}{a}$.……6 分

故 $f(x_1)-f(x_2)$

$=(2\ln x_1+ax_1^2-ax_1)-(2\ln x_2+ax_2^2-ax_2)$

$=2\ln x_1-2\ln x_2-\dfrac{a}{2}(x_1-x_2)$

$=2\ln x_1-2\ln\dfrac{1}{ax_1}-\dfrac{a}{2}\left[x_1-\left(\dfrac{1}{2}-x_1\right)\right]$

$=4\ln x_1-ax_1+\dfrac{a}{4}+2\ln a$，其中 $0<x_1<\dfrac{1}{4}$.

……8 分

令 $h(x)=4\ln x-ax+\dfrac{a}{4}+2\ln a$，$0<x<\dfrac{1}{4}$，$h'(x)=\dfrac{4}{x}-a=\dfrac{4-ax}{x}$，

当 $0<x<\dfrac{4}{a}$ 时，$h'(x)>0$，当 $\dfrac{4}{a}<x<\dfrac{1}{4}$ 时，$h'(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{4}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{4}{a},\dfrac{1}{4}\right)$ 上单调递减，……10 分

故 $h(x)\leqslant h\left(\frac{4}{a}\right)=4\ln\frac{4}{a}-4+\frac{a}{4}+2\ln a-\frac{a}{4}-2\ln a$

$+4(\ln 4-1)<\frac{a}{4}-2\ln a+4$.

所以 $f(x_1)-f(x_2)<\frac{a}{4}-2\ln a+4$ 成立. ……………12 分

21. **解**:(1)∵直线 l 过焦点 F 时,P,Q 到 C 的准线 $x=-\frac{p}{2}$ 的距离之和为 12,

∴此时 PQ 的中点到 $x=-\frac{p}{2}$ 的距离为 6,

又 PQ 的中点到 y 轴的距离为 4,∴y 轴$(x=0)$与 $x=-\frac{p}{2}$ 间的距离为 2,即 $\frac{p}{2}=2$,

解得 $p=4$,

∴抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$. ……………4 分

(2)证明:直线 $l:y=k(x+2)(k\neq0)$,即 $x=\frac{1}{k}y-2$,

令 $\frac{1}{k}=n$,则直线 $l:x=ny-2$,设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}x=ny-2,\\ y^2=8x,\end{cases}$ 得 $y^2-8ny+16=0$,

则 $\Delta=64n^2-64>0$,∴$n^2>1$,

∴$y_1+y_2=8n$,$y_1y_2=16$. ……………6 分

设抛物线 C 在点 P,Q 处的切线方程分别为 $x=n_1(y-y_1)+x_1$,$x=n_2(y-y_2)+x_2$,

由 $\begin{cases}x=n_1(y-y_1)+x_1,\\ y^2=8x,\end{cases}$ 得 $y^2-8n_1y+8n_1y_1-8x_1=0$,

∴$\Delta_1=64n_1^2-32n_1y_1+32x_1=0$,又 $y_1^2=8x_1$,则 $\frac{y_1^2}{8}=x_1$,

∴$2n_1^2-n_1y_1+\frac{y_1^2}{8}=\frac{1}{8}(4n_1-y_1)^2=0$,则 $4n_1=y_1$.

同理可得 $4n_2=y_2$.

联立两切线方程 $\begin{cases}x=n_1(y-y_1)+x_1,\\ x=n_2(y-y_2)+x_2,\end{cases}$ 将 $4n_1=y_1$,$4n_2=y_2$ 代入,

解得 $\begin{cases}x=\frac{y_1y_2}{8}=2,\\ y=\frac{y_1+y_2}{2}=4n,\end{cases}$ ∴$T(2,4n)$, ……………8 分

∴$|TP|^2=(x_1-2)^2+(y_1-4n)^2$,又 $x_1=ny_1-2$,

∴$|TP|^2=(ny_1-4)^2+(y_1-4n)^2=(n^2+1)y_1^2-16ny_1+16n^2+16$.

同理可得 $|TQ|^2=(n^2+1)y_2^2-16ny_2+16n^2+16$.

……………9 分

∵$\frac{|PF|}{|QF|}=\frac{x_1+2}{x_2+2}=\frac{ny_1-2+2}{ny_2-2+2}=\frac{y_1}{y_2}$,

∴要证 $|PF|\cdot|TQ|^2=|QF|\cdot|TP|^2$,

等价于证明 $y_1\cdot|TQ|^2=y_2\cdot|TP|^2$,

∵$y_1\cdot|TQ|^2=(n^2+1)y_1y_2^2-16ny_1y_2+16(n^2+1)y_1$,

又 $y_1y_2=16$,

∴$y_1\cdot|TQ|^2=16(n^2+1)(y_1+y_2)-256n$,

同理可得 $y_2\cdot|TP|^2=16(n^2+1)(y_1+y_2)-256n$,

……………11 分

∴$y_1\cdot|TQ|^2=y_2\cdot|TP|^2$,即 $|PF|\cdot|TQ|^2=|QF|\cdot|TP|^2$. ……………12 分

22. **解**:(1)由曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5-3\cos 2\theta}}$,

得 $\rho^2(5-3\cos 2\theta)=8$,即 $\rho^2(8-6\cos^2\theta)=8$,即 $2x^2+8y^2=8$,

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………3 分

由圆锥曲线参数方程定义,得

曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\varphi,\\ y=\sin\varphi\end{cases}$ (φ 为参数).

……………5 分

(2)由曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=2+\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数),

得曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2+(y-2)^2=1$,其圆心 $C_1(0,2)$,半径 $r=1$. ……………6 分

由题意可得设 $N(2\cos\varphi,\sin\varphi)$,

易知 $|MN|$ 的最大值为点 N 到圆心 C_1 的距离的最大值再加上半径,

即 $|MN|_{\max}=|NC_1|+r=\sqrt{(2\cos\varphi-0)^2+(\sin\varphi-2)^2}+1=\sqrt{-3\sin^2\varphi-4\sin\varphi+8}+1$, ……………8 分

由二次函数性质可知,当 $\sin\varphi=-\frac{2}{3}$ 时,$|MN|_{\max}=\frac{2\sqrt{21}}{3}+1$,

所以 $|MN|$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{21}}{3}+1$. ……………10 分

23. **解**:(1)当 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 时,$f(x)=2x+2x-1=4x-1<3$,解得 $\frac{1}{2}\leqslant x<1$; ……………1 分

当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时,则有 $f(x)=2x+1-2x=1<3$,解得 $0<x<\frac{1}{2}$; ……………2 分

当 $x\leqslant0$ 时,$f(x)=-2x+1-2x=1-4x<3$,解得 $-\frac{1}{2}<x\leqslant0$. ……………3 分

综上所述,不等式 $f(x)<3$ 的解集为 $\left(-\frac{1}{2},1\right)$.

……………5 分

(2)证明:由绝对值三角不等式可得 $f(x)=|2x|+|2x-1|\geqslant|2x-(2x-1)|=1$,

当且仅当 $0\leqslant2x\leqslant1$ 时,即当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时,等号成立,故 $m=1$, ……………7 分

所以 $(a+b)+(b+c)=a+2b+c=1$,

又因为 a,b,c 均为正数,

所以 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\right)[(a+b)+(b+c)]$

$=2+\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}$

$\geqslant2+2\sqrt{\frac{a+b}{b+c}\cdot\frac{b+c}{a+b}}=4$, ……………9 分

当且仅当 $a+b=b+c=\frac{1}{2}$ 时,等号成立,故 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}\geqslant4$. ……………10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。