

数学-参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	A	D	D	C	B	A

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 全部选对得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的或不选的得 0 分

题号	9	10	11	12
答案	AC	ACD	BD	ABC

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 2

14. 9

15. $\frac{5\pi}{12}$ (答案不唯一)16. $[-1, +\infty)$

四、解答题：共 70 分.

17. (10 分)

【解析】

(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{由 } \begin{cases} a_3 = 5 \\ a_{17} = 3a_6 \end{cases}, \text{ 可得 } \begin{cases} a_1 + 2d = 5 \\ a_1 + 16d = 3(a_1 + 5d) \end{cases}$$

解得 $a_1 = 1, d = 2$,所以等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可得 $a_n = 2n - 1$;

$$(2) \text{ 由 (1) 可得 } b_n = \frac{2}{n(a_n + 3)} = \frac{2}{2n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$\text{所以 } S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}.$$

18. (12 分)

【解析】

$$(1) \text{ 函数 } f(x) = \sqrt{3} \sin^2 x + \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - \cos 2x) + \frac{1}{2} \sin 2x = \sin \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{由 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ 可得 } x \in \left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right], \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{所以函数的增区间为 } \left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right], \quad k \in \mathbf{Z};$$

(2) 由题可得函数 $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,

所以函数的最小值为 -1 , 此时 $x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 即 $x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $g(x)$ 最小值为 -1 , 取得最小值时的 x 的取值集合为 $\left\{x \mid x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

19. (12 分)

【解析】

(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} - a\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right) = \frac{x^2 + 2}{x^2} - a\frac{x^2 + 2}{x^3} = \frac{(x^2 + 2)(x - a)}{x^3},$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, 当 $x \in (0, a)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (a, +\infty)$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增.

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } f(x)_{\min} = f(a) = a - \frac{2}{a} - a\left(\ln a - \frac{1}{a^2}\right) = a - a \ln a - \frac{1}{a},$$

$$\text{即 } g(a) = a - a \ln a - \frac{1}{a}.$$

$$\text{解法一: } g'(a) = 1 - \ln a - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2} - \ln a, \quad g''(a) = -\frac{2}{a^3} - \frac{1}{a} < 0,$$

$\therefore g'(a)$ 单调递减,

又 $g'(1) > 0$, $g'(2) < 0$, 所以存在 $a_0 \in (1, 2)$, 使得 $g'(a_0) = 0$,

$\therefore$ 当 $a \in (0, a_0)$ 时, $g'(a) > 0$, $g(a)$ 单调递增;

当 $a \in (a_0, +\infty)$ 时, $g'(a) < 0$, $g(a)$ 单调递减;

$$\therefore g(a)_{\max} = g(a_0) = a_0 - a_0 \ln a_0 - \frac{1}{a_0}, \text{ 又 } g'(a_0) = 0, \text{ 即 } \frac{1}{a_0^2} - \ln a_0 = 0, \ln a_0 = \frac{1}{a_0^2},$$

$$\therefore g(a_0) = a_0 - a_0 \frac{1}{a_0^2} - \frac{1}{a_0} = a_0 - \frac{2}{a_0}, \text{ 令 } t(a_0) = g(a_0), \text{ 则 } t(a_0) \text{ 在 } (1, 2) \text{ 上单调递增,}$$

又 $a_0 \in (1, 2)$, 所以 $t(a_0) < t(2) = 2 - 1 = 1$, $\therefore g(a) < 1$.

解法二：要证 $g(a) < 1$ ，即证 $a - a \ln a - \frac{1}{a} < 1$ ，即证： $1 - \ln a - \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a}$ ，

令 $h(a) = \ln a + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 1$ ，则只需证 $h(a) = \ln a + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 1 > 0$ ，

$$h'(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^3} = \frac{a^2 - a - 2}{a^3} = \frac{(a-2)(a+1)}{a^3},$$

当 $a \in (0, 2)$ 时， $h'(a) < 0$ ， $h(a)$ 单调递减；

当 $a \in (2, +\infty)$ 时， $h'(a) > 0$ ， $h(a)$ 单调递增；

$$\text{所以 } h(a)_{\min} = h(2) = \ln 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 1 = \ln 2 - \frac{1}{4} > 0,$$

所以 $h(a) > 0$ ，即 $g(a) < 1$ 。

20. (12 分)

【解析】

(1) 因为 $2c \sin B = (2a - c) \tan C$ ，

由正弦定理可得 $2 \sin C \sin B = (2 \sin A - \sin C) \frac{\sin C}{\cos C}$ ，

$$\text{即 } 2 \sin B \cos C = 2 \sin A - \sin C$$

又由 $\sin A = \sin[\pi - (B + C)] = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$ ，

$$\text{可得 } 2 \cos B \sin C = \sin C,$$

因为 $C \in (0, \pi)$ ，可得 $\sin C > 0$ ，所以 $\cos B = \frac{1}{2}$ ，

又因为 $B \in (0, \pi)$ ，可得 $B = \frac{\pi}{3}$ 。

(2) 选①：因为 $c = 2$ ， $b = \sqrt{3}$ ，

$$\text{由余弦定理可得 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + 4 - 3}{4a} = \frac{1}{2},$$

整理得 $a^2 - 2a + 1 = 0$ ，解得 $a = 1$ ，

因为 CE 为 $\angle ACB$ 的平分线，令 $\angle ACE = \angle BCE = \theta$ ，

$$\text{则 } S_1 = \frac{1}{2} BC \cdot CE \sin \theta = \frac{1}{2} \times 1 \times CE \sin \theta, \quad S_2 = \frac{1}{2} AC \cdot CE \sin \theta = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times CE \sin \theta,$$

所以 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，故 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

选②： $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ， $b = \sqrt{7}$ ， $A > C$ ，

$$\text{由 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ac \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \text{ 解得 } ac = 3,$$

又由 $b = \sqrt{7}$ ，由余弦定理可得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ ，

即 $7 = a^2 + c^2 - 2 \times 3 \times \frac{1}{2}$, 可得 $a^2 + c^2 = 10$,

又因为 $A > C$, 可得 $a > c$, 所以 $(a+c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac = 10 + 2 \times 3 = 16$, 即 $a+c=4$,

$$\text{联立方程组} \begin{cases} a+c=4 \\ ac=3 \\ a>c \end{cases}, \text{解得 } a=3, c=1,$$

由 CE 为 $\angle ACB$ 的平分线, 令 $\angle ACE = \angle BCE = \theta$,

$$\text{所以 } S_1 = \frac{1}{2} BC \cdot CE \sin \theta = \frac{1}{2} \times 3 \times CE \sin \theta, \quad S_2 = \frac{1}{2} AC \cdot CE \sin \theta = \frac{1}{2} \times \sqrt{7} \times CE \sin \theta,$$

$$\text{所以 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}, \text{ 故 } \frac{S_1}{S_2} \text{ 的值为 } \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

21. (12 分)

【解析】

(1) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 = 2py \\ y = kx + 2 \end{cases}, \text{ 得 } x^2 - 2pkx - 4p = 0,$$

$$\text{故 } x_1 x_2 = -4p,$$

$$\text{由 } OA \perp OB, \text{ 可得 } x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0, \text{ 即 } x_1 x_2 + \frac{x_1^2}{2p} \cdot \frac{x_2^2}{2p} = 0,$$

$$\therefore p = 1,$$

故抛物线 C 的方程为: $x^2 = 2y$;

(2) 设 PA 的倾斜角为 θ , 则 PB 的倾斜角为 $\pi - \theta$,

$$\therefore k_{PA} + k_{PB} = \tan \theta + \tan(\pi - \theta) = 0,$$

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 = 2y \\ y = kx + 2 \end{cases}, \text{ 得 } x^2 - 2kx - 4 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 2k,$$

$$\therefore k_{PA} = \frac{y_1 - 2}{x_1 - 2} = \frac{\frac{1}{2}x_1^2 - 2}{x_1 - 2} = \frac{x_1 + 2}{2}, \text{ 同理 } k_{PB} = \frac{x_2 + 2}{2},$$

$$\text{由 } k_{PA} + k_{PB} = 0, \text{ 得 } \frac{x_1 + 2}{2} + \frac{x_2 + 2}{2} = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 + 4 = 0, \text{ 即 } 2k + 4 = 0,$$

$$\text{故 } k = -2.$$

22. (12 分)

【解析】

$$(1) \text{ 当 } a=1 \text{ 时, } f'(x) = \frac{(2x-x^2)-e^{x-1}}{e^{x-1}}.$$

令 $h(x) = 2x - x^2 - e^{x-1}$, 则 $h'(x) = 2 - 2x - e^{x-1}$, 显然 $h'(x)$ 在上 $(\frac{3}{4}, 2)$ 单调递减,

$$\text{又因为 } h'(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt[4]{e}} < 0,$$

故 $x \in (\frac{3}{4}, 2)$ 时, 总有 $h'(x) < 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(\frac{3}{4}, 2)$ 上单调递减.

由于 $h(1) = 0$, 所以当 $x \in (\frac{3}{4}, 1)$ 时, $h(x) > 0$; 当 $x \in (1, 2)$ 时, $h(x) < 0$.

当 x 变化时, $f'(x)$ 、 $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(\frac{3}{4}, 1)$	1	$(1, 2)$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	增	极大	减

所以 $f(x)$ 在 $(\frac{3}{4}, 2)$ 上的极大值是 $f(1) = 1$, 无极小值.

$$(2) \text{ 由于 } g(x) = (x^2 - a)e^{1-x}, \text{ 则 } g'(x) = (-x^2 + 2x + a)e^{1-x}.$$

由题意, 方程 $-x^2 + 2x + a = 0$ 有两个不等实根 x_1, x_2 ,

$$\text{则 } \Delta = 4 + 4a > 0, \text{ 解得 } a > -1, \text{ 且 } \begin{cases} -x_1^2 + 2x_1 + a = 0 \\ -x_2^2 + 2x_2 + a = 0 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}, \text{ 又 } x_1 < x_2, \text{ 所以 } x_1 < 1.$$

$$\text{由 } x_2 g(x_1) \leq \lambda f'(x_1), \quad f'(x) = (2x - x^2)e^{1-x} - a, \text{ 可得 } x_2(x_1^2 - a)e^{1-x_1} \leq \lambda[(2x_1 - x_1^2)e^{1-x_1} - a]$$

$$\text{又 } x_2 = 2 - x_1, a = x_1^2 - 2x_1. \text{ 将其代入上式得: } 2x_1(2 - x_1)e^{1-x_1} \leq \lambda[(2x_1 - x_1^2)e^{1-x_1} + (2x_1 - x_1^2)].$$

$$\text{整理得 } x_1[2e^{1-x_1} - \lambda(e^{1-x_1} + 1)] \leq 0, \text{ 即 } x_1[2e^{1-x_1} - \lambda(e^{1-x_1} + 1)] \leq 0, \forall x_1 \in (-\infty, 1)$$

当 $x_1 = 0$ 时, 不等式 $x_1[2e^{1-x_1} - \lambda(e^{1-x_1} + 1)] \leq 0$ 恒成立, 即 $\lambda \in \mathbf{R}$.

$$\text{当 } x_1 \in (0, 1) \text{ 时, } 2e^{1-x_1} - \lambda(e^{1-x_1} + 1) \leq 0 \text{ 恒成立, 即 } \lambda \geq \frac{2e^{1-x_1}}{e^{1-x_1} + 1},$$

$$\text{令 } k(x) = \frac{2e^{1-x_1}}{e^{1-x_1} + 1}, \text{ 易证 } k(x) \text{ 是 } \mathbf{R} \text{ 上的减函数.}$$

$$\text{因此, 当 } x \in (0, 1) \text{ 时, } k(x) < k(0) = \frac{2e}{e+1}, \text{ 故 } \lambda \geq \frac{2e}{e+1}.$$

$$\text{当 } x_1 \in (-\infty, 0) \text{ 时, } 2e^{1-x_1} - \lambda(e^{1-x_1} + 1) \geq 0 \text{ 恒成立, 即 } \lambda \leq \frac{2e^{1-x_1}}{e^{1-x_1} + 1},$$

$$\text{因此, 当 } x \in (-\infty, 0) \text{ 时, } k(x) > k(0) = \frac{2e}{e+1} \text{ 所以 } \lambda \leq \frac{2e}{e+1}.$$

$$\text{综上所述, } \lambda = \frac{2e}{e+1}.$$