

高三数学考试参考答案

1. D 【解析】本题考查集合的交集,考查数学运算的核心素养.

由 $N = \{x | 0 < x < 3\}$, 得 $M \cap N = (1, 3)$.

2. A 【解析】本题考查复数的运算、共轭复数、复平面,考查数学运算的核心素养.

因为 $z = 2 + i$, 所以 $i\bar{z} = i(2 - i) = 1 + 2i$, 则 $i\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于第一象限.

3. D 【解析】本题考查等比数列的定义,考查逻辑推理的核心素养.

因为 $a_n + a_{n-1} = (-\frac{1}{2})^n + (-\frac{1}{2})^{n-1} = (-\frac{1}{2})^n (1 - \frac{1}{2}) = -(-\frac{1}{2})^n$, 所以 $\{a_n + a_{n-1}\}$ 的首项为 $-\frac{1}{4}$, 且 $\frac{a_{n+1} + a_{n+2}}{a_n + a_{n+1}} = -\frac{1}{2}$, 所以 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 是公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列.

4. A 【解析】本题考查二项式定理,考查数学运算的核心素养.

$(2x - y)^5$ 的展开式中, $x^2 y^3$ 的系数为 $C_5^3 \times 2^2 \times (-1)^3 = -40$.

5. B 【解析】本题考查台体的体积,考查应用意识.

依题意可得该牛皮鼓的体积可视为两个相同的圆台(上底面半径为 25 cm, 下底面半径为 30 cm, 高为 30 cm)的体积之和, 所以该牛皮鼓的体积为 $2 \times \frac{1}{3} \pi \times 30 \times (25^2 + 25 \times 30 + 30^2) = 45500\pi \text{ cm}^3$.

6. B 【解析】本题考查对数大小的比较,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

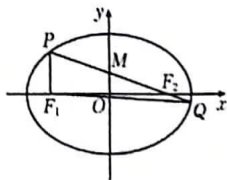
因为 $\frac{3}{2} = \log_3 3\sqrt{3} < a = \log_3 6 < \log_3 9 = 2$, $c = \log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{8} = \log_8 8 = \log_2 2^3 = \frac{3}{2}$, 所以 $b > a > c$.

7. B 【解析】本题考查导数的几何意义及直线的倾斜角,考查数学运算与逻辑推理的核心素养.

$y' = 3x^2 - 4x$, 则 l 的斜率为 $3k^2 - 4k$. 因为 l 的倾斜角小于 135° , 所以 l 的斜率小于 -1 或小于 0 , 则 $3k^2 - 4k < -1$ 或 $3k^2 - 4k \geq 0$, 解得 $k \in (-\infty, 0] \cup (\frac{1}{3}, 1) \cup [\frac{4}{3}, +\infty)$.

8. C 【解析】本题考查椭圆的定义与性质,考查直观想象的核心素养.

如图, 连接 $F_1 Q$, 由 $\overrightarrow{MF_2} = 2\overrightarrow{F_2 Q}$, 得 $|PF_2| = 4|F_2 Q|$, 设 $|F_2 Q| = t$, 则 $|PF_2| = 4t$, $|PF_1| = 2a - 4t$, $|QF_1| = 2a - t$. 由余弦定理得 $|QF_1|^2 = |PF_1|^2 + |PQ|^2 - 2|PF_1| \cdot |PQ| \cos \angle F_1 P Q$, 即 $(2a - t)^2 = (2a - 4t)^2 + (5t)^2 - 2(2a - 4t) \times 5t \times \frac{2a - 4t}{4t}$, 整理得 $t = \frac{5}{14}a$, 则



$|F_1 F_2| = \sqrt{(4t)^2 - (2a - 4t)^2} = \sqrt{16at - 4a^2} = \frac{2\sqrt{21}}{7}a$, 故 $e = \frac{2c}{2a} = \frac{|F_1 F_2|}{2a} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

9. BCD 【解析】本题考查三角函数的图象及其性质、三角恒等变换,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

因为 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$, 所以 $f(x)$ 的最小正周期为 2π . 因为 $f(\frac{5\pi}{4}) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$, $f(-\frac{5\pi}{4})$



$= \sin(-\pi) = 0$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{4}$ 对称, $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{5\pi}{4}, 0)$ 对称.

$$f(x) + f(-x) = \sin(x + \frac{\pi}{4}) + \sin(-x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos x.$$

10. ACD 【解析】本题考查统计中的极差、中位数、平均数、方差、百分位数, 考查数据处理能力与推理论证能力.

对于 A 选项, 如果删去的不是最大值或最小值, 那么极差不变, 所以 A 正确.

对于 B 选项, 删除前有 6 个数, 中位数是按从小到大的顺序排列后中间两个数的平均数, 因为任何两个数据都不相等, 所以中位数不会等于 6 个数据中的任何一个, 而删除后有 5 个数, 中位数是 6 个数中的某一个, 所以 B 错误.

对于 C 选项, 平均数不变意味着删去的数据刚好等于平均数, 在方差公式中, 分子不变, 分母变小, 所以方差变大, 所以 C 正确.

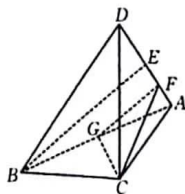
对于 D 选项, 平均数不变意味着删去的数据刚好等于平均数, 在按从小到大的顺序排列的 6 个数中, 因为 $6 \times 20\% = 1.2$, $5 \times 20\% = 1$, 所以原数据的 20% 分位数是第 2 个数, 新数据的 20% 分位数是前 2 个数的平均数, 且该数值小于第 2 个数, 所以 D 正确.

11. BC 【解析】本题考查抽象函数与具体函数的奇偶性, 考查逻辑推理与数学抽象的核心素养.

令 $x=y=0$, 得 $f(0)=0$, 令 $y=0$, 得 $f(x)=xf(0)=0$, 则 $f(-x)=f(x)=-f(x)=0$, 所以 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数. 由 $g(x+1)=(x+1)(x^2+2x)=(x+1)[(x+1)^2-1]$, 得 $g(x)=x^3-x$, 因为 $g(-x)=-g(x)$, 所以 $g(x)$ 是奇函数.

12. ACD 【解析】本题考查立体几何初步中的体积、距离、二面角, 考查空间想象能力与运算求解能力.

如图, 取 AB 的中点 G , 连接 CG , 因为平面 $ABC \perp$ 平面 ABD , 且平面 $ABC \cap$ 平面 $ABD = AB$, 所以 $CG \perp$ 平面 ABD . 取 AD 的中点 E , 连接 BE , 因为 $AB=BD$, 所以 $BE \perp AD$, 则 $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = 2\sqrt{2}$. 因为 $CG = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,



所以 $V_{D-ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = \sqrt{6}$, A 正确. 取 AE 的中点 F , 连接 FG, CF , 则 $FG \parallel BE$, 所以 $FG \perp AD$. 因为 $CG \perp$ 平面 ABD , 所以 $CG \perp AD$, 又 $CG \cap FG = G$, 所以 $AD \perp$ 平面 CFG , 则 $AD \perp CF$, 则 $CF = \sqrt{CG^2 + FG^2} = \frac{\sqrt{35}}{2}$, $\angle CFG$ 为二面角 $B-AD-C$ 的平面角,

且 $\tan \angle CFG = \frac{CG}{FG} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$, B 错误, C 正确. 设 $\triangle ABD, \triangle ABC$ 的外心分别为 K, M , 则 $GK \perp AB$, 又平面 $ABD \perp$ 平面 ABC , 所以 $GK \perp$ 平面 ABC . 设三棱锥 $D-ABC$ 外接球的球心为 O , 则 $OK \perp$ 平面 $ABD, OM \perp$ 平面 ABC , 所以四边形 $OMGK$ 为矩形, 则 $OK = MG = \frac{1}{3}CG =$



$\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故三棱锥 $D-ABC$ 外接球的球心到平面 ABD 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, D 正确.

13. $4\sqrt{2}$ 【解析】本题考查双曲线的性质, 考查数学运算的核心素养.

依题意可得 $2c=6, 2a=2$, 则 $c=3, a=1$, 所以该双曲线的虚轴长为 $2b=2\sqrt{c^2-a^2}=4\sqrt{2}$.

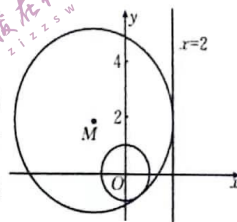
14. $\frac{2}{3}$ 【解析】本题考查投影向量与平面向量的基本定理, 考查直观想象的核心素养.

在矩形 $ABCD$ 中, 因为向量 \vec{AE} 在向量 \vec{AD} 上的投影向量为 $\frac{1}{3}\vec{AD}$, 所以 $\vec{AE}=\vec{AB}+\frac{1}{3}\vec{AD}$, 又

$\vec{AO}=\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AD}$, 所以 $\vec{OE}=\vec{AE}-\vec{AO}=\frac{1}{2}\vec{AB}-\frac{1}{6}\vec{AD}$, 所以 $\lambda-\mu=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

15. $y^2=1-2x$ 【解析】本题考查圆与圆的位置关系、直线与圆的位置关系, 考查直观想象与数学运算的核心素养.

设 $M(x, y)$, 点 M 到直线 $x=2$ 的距离为 d , 如图, M 只能在直线 $x=2$ 的左侧, 则 $d=2-x$, 依题意可得 $|MO|+1=d$, 即 $\sqrt{x^2+y^2}=(2-x)-1$, 化简可得 $y^2=1-2x$, 故圆 M 的圆心的轨迹方程为 $y^2=1-2x$.



16. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 【解析】本题考查三角恒等变换与导数的应用, 考查数学建模与数学运算的核心素养.

设 $\tan \theta=x$, 则 $x>1$, $\tan 2\theta-\tan \theta=\frac{2x}{1-x^2}-x=\frac{x+x^3}{1-x^2}$.

设函数 $f(x)=\frac{x+x^3}{1-x^2}(x>1)$, 则 $f'(x)=\frac{-x^4+4x^2+1}{(1-x^2)^2}=\frac{(x^2-\sqrt{5}-2)(x^2+\sqrt{5}-2)}{(1-x^2)^2}(x>1)$.

当 $1<x^2<\sqrt{5}+2$ 时, $f'(x)>0$; 当 $x^2>\sqrt{5}+2$ 时, $f'(x)<0$.

所以当 $x^2=\sqrt{5}+2$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 即 $\tan 2\theta-\tan \theta$ 取得最大值,

此时 $\frac{\tan 2\theta}{\tan \theta}=\frac{2}{1-x^2}=\frac{2}{1-(\sqrt{5}+2)}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

17. (1) 证明: 因为 $\vec{ED_1}=2\vec{C_1E}, \vec{FB_1}=2\vec{C_1F}$, 所以 $\frac{ED_1}{C_1E}=\frac{FB_1}{C_1F}=2$,

所以 $EF\parallel B_1D_1$, 2 分

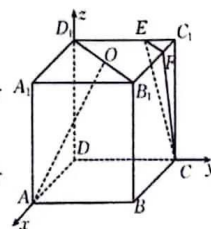
因为 $B_1D_1\subset$ 平面 $CEF, EF\subset$ 平面 CEF , 所以 $B_1D_1\parallel$ 平面 CEF .

..... 4 分

(2) 解: 如图, 以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系 $Dxyz$, 设 $AB=3$,

则 $A(3, 0, 0), C(0, 3, 0), O(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3), E(0, 2, 3), F(1, 3, 3)$, 5 分

$\vec{CE}=(0, -1, 3), \vec{EF}=(1, 1, 0)$ 6 分



设平面 CEF 的法向量为 $m=(x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{CE} \cdot m = -y + 3z = 0, \\ \vec{EF} \cdot m = x + y = 0, \end{cases}$ 7分

令 $x=3$, 得 $m=(3, -3, -1)$, 8分

因为 $\vec{AO} = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3)$, 所以 $\cos\langle \vec{AO}, m \rangle = \frac{\vec{AO} \cdot m}{|\vec{AO}| |m|} = \frac{-12}{3\sqrt{6} \times \sqrt{19}} = -\frac{8}{\sqrt{114}}$ 9分

所以直线 AO 与平面 CEF 所成角的正弦值为 $\frac{8}{\sqrt{114}}$, 其平方为 $\frac{64}{114} = \frac{32}{57}$ 10分

评分细则:

【1】第(1)问中, 未写“ $B_1D_1 \perp$ 平面 CEF , $EF \subset$ 平面 CEF ”扣1分.

【2】第(2)问中, 建系方式不唯一, 平面 CEF 的法向量不唯一, 如果建系的方式相同, 那么只要所求法向量与 $m=(3, -3, -1)$ 共线即可.

18. 解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $A+B+C=\pi$, 因为 $A+B=11C$, 所以 $C=\frac{\pi}{12}$, 1分

则 $\sin C = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 3分

因为 $\cos A = \frac{4}{5}$, 所以 $\sin A = \frac{3}{5}$, 4分

由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$, 则 $BC = \frac{AB \sin A}{\sin C} = \frac{12}{5}$ 6分

(2) 由(1)知 $C = \frac{\pi}{12}$, 则 $A = 2C = \frac{\pi}{6}$, 7分

在 $\triangle ADE$ 中, 由余弦定理得 $DE^2 = AE^2 + AD^2 - 2AE \cdot AD \cos A$, 8分

代入数据, 得 $7 = 3 + AD^2 - 2\sqrt{3}AD \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $AD = 4$ ($AD = -1$ 舍去), 10分

所以 $\triangle BDE$ 的面积为 $\frac{1}{2} AE \cdot AD \cdot \sin A - \frac{1}{2} AE \cdot AB \cdot \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \times [4 - (\sqrt{6} - \sqrt{2})]$
 $= \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ 12分

评分细则:

【1】第(1)问中, 若 BC 最后的结果计算错误, 但得到 $BC = \frac{AB \sin A}{\sin C}$, 只扣1分.

【2】第(2)问中, 最后的结果写为 $\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$, 不扣分.

19. 解: (1) 用 M 表示事件“测试者提出的两个问题相同”, N 表示事件“测试者对机器产生误判”, 则 $P(N) = P(NM) + P(N\bar{M}) = P(M)P(N|M) + P(\bar{M})P(N|\bar{M})$ 3分

$= 0.6 \times 0.1 + (1 - 0.6) \times 0.35 = 0.2$ 5分

(2) 设 X 为4名测试者中产生误判的人数, 由(1)可知, $X \sim B(4, 0.2)$, 7分

若机器通过本轮的图灵测试, 则4名测试者中至少有2名产生误判, 8分



所以机器 A 通过图灵测试的概率 $P=1-P(X=0)-P(X=1)=1-C_1^4 \times 0.2^0 \times (1-0.2)^4 - C_1^4 \times 0.2 \times (1-0.2)^3=0.1808$ 12 分
评分细则:

【1】第(1)问中,得到“ $P(N)=P(M)P(N|M)+P(\bar{M})P(N|\bar{M})$ ”,但未写“ $P(N)=P(NM)+P(N\bar{M})$ ”,不扣分.

【2】第(2)问中,得到“ $P=1-C_1^4 \times 0.2^0 \times (1-0.2)^4 - C_1^4 \times 0.2 \times (1-0.2)^3=0.1808$ ”,但未写“4 名测试者中至少有 2 名产生误判”,不扣分.第(2)问还可以用直接法求解,解析如下:

设 X 为 4 名测试者中产生误判的人数,由(1)可知, $X \sim B(4, 0.2)$, 7 分

若机器 A 通过本轮的图灵测试,则 4 名测试者中至少有 2 名产生误判, 8 分

所以机器 A 通过图灵测试的概率 $P=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=C_2^4 \times 0.2^2 \times (1-0.2)^2 + C_3^4 \times 0.2^3 \times (1-0.2) + C_4^4 \times 0.2^4=0.1808$ 12 分

20. (1)证明:当 $n=1$ 时, $S_2+S_1=4$, 则 $a_2+2a_1=4$, 因为 $a_1=1$, 所以 $a_2=2$ 1 分

当 $n \geq 2$ 时, 由 $S_{n-1}+S_n=(n+1)^2$, 得 $S_n+S_{n-1}=n^2$, 两式相减得 $a_{n+1}+a_n=2n+1$ 2 分

又 $a_1+a_2=3=2 \times 1+1$, 所以当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $a_{n+1}+a_n=2n+1$ 3 分

(2)解: $a_{n+2}-a_n=(a_{n-2}+a_{n+1})-(a_{n-1}+a_n)=(2n+3)-(2n+1)=2$, 4 分

所以 $\{a_n\}$ 的奇数项是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, 偶数项是以 2 为首项, 2 为公差的等差数列. 5 分

所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列, 故 $a_n=n$ 6 分

(3)解: $T_n=0-\frac{1}{2^3}-\frac{2}{2^4}-\dots-\frac{n-1}{2^{n+1}}$, 7 分

则 $\frac{1}{2}T_n=-\frac{1}{2^4}-\frac{2}{2^5}-\dots-\frac{n-1}{2^{n+2}}$, 8 分

则 $T_n-\frac{1}{2}T_n=-\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\dots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)+\frac{n-1}{2^{n+2}}$, 9 分

所以 $\frac{1}{2}T_n=-\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+2}}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{n-1}{2^{n+2}}=\frac{n+1}{2^{n+2}}-\frac{1}{4}$, 11 分

故 $T_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}$ 12 分

评分细则:

【1】第(2)问中,得到 $a_{n+1}+a_n=2n+1$ 后,还可以通过下面的方法得到数列 $\{a_n\}$ 的通项公式:

由 $a_{n+1}+a_n=2n+1$, 得 $a_{n+1}-(n+1)=-\left(a_n-n\right)$, 因为 $a_1-1=0$, 所以 $a_n-n=0$, 即 $a_n=n$.

【2】第(3)问还可以用裂项相消法求解,过程如下:

因为 $b_n=\frac{1-a_n}{2^{n+1}}=\frac{n+1-2n}{2^{n+1}}=\frac{n+1}{2^{n+1}}-\frac{n}{2^n}$, 9 分

所以 $T_n=\frac{2}{2^2}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2^3}-\frac{2}{2^2}+\dots+\frac{n+1}{2^{n+1}}-\frac{n}{2^n}=\frac{n+1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}$ 12 分



21. (1) 证明: 将点 $(2, -2\sqrt{6})$ 代入 $y^2 = 2px$, 得 $24 = 4p$, 即 $p = 6$ 1分

联立 $\begin{cases} y^2 = 12x, \\ y = kx + m (k \neq 0), \end{cases}$ 得 $ky^2 - 12y + 12m = 0$, 2分

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 y_2 = \frac{12m}{k}$, 3分

$x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{12} \cdot \frac{y_2^2}{12} = \frac{(y_1 y_2)^2}{144} = \frac{m^2}{k^2}$ 4分

因为 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, 所以 $\frac{m^2}{k^2} + \frac{12m}{k} = 0$ 恒成立, 则 $m = -12k$, 5分

所以 l_1 的方程为 $y = k(x - 12)$, 故直线 l_1 过定点 $(12, 0)$ 6分

(2) 解: 联立 $\begin{cases} y^2 = 12x, \\ y = 2x + m, \end{cases}$ 得 $4x^2 + (4m - 12)x + m^2 = 0$, 7分

则 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m + 3, \\ x_1 x_2 = \frac{m^2}{4}, \end{cases}$ 7分

且 $\Delta = (4m - 12)^2 - 16m^2 = 48(3 - 2m) > 0$, 即 $m < \frac{3}{2}$, 8分

$|AB| = \sqrt{1 + 2^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + 2^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{9 - 6m}$, 9分

设 $l_2: y = 2x + n$, 同理可得 $|MN| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{9 - 6n}$ 10分

因为直线 l_2 在 l_1 的右侧, 所以 $n < m$, 则 $d = \frac{m - n}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$, 即 $n = m - 5$ 11分

所以 $|MN| - |AB| = \sqrt{5} [\sqrt{9 - 6(m - 5)} - \sqrt{9 - 6m}] = 10$,

即 $\sqrt{39 - 6m} = 2\sqrt{5} + \sqrt{9 - 6m}$, 解得 $m = \frac{31}{24}$,

因为 $\frac{31}{24} < \frac{3}{2}$, 所以 $m = \frac{31}{24}$ 12分

评分细则:

【1】第(1)问中, 联立 $\begin{cases} y^2 = 12x, \\ y = kx + m (k \neq 0), \end{cases}$ 消去 y 得 $k^2 x^2 + (2km - 12)x + m^2 = 0$, 也可以求得 $m = -12k$, 从而得到直线 l_1 过定点 $(12, 0)$.

【2】第(2)问中, 还可以用 $|AB| = \sqrt{1 + (\frac{1}{2})^2} |y_1 - y_2| = \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2}$, 得到 $|AB| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{9 - 6m}$. 解析中, 未写 $\frac{31}{24} < \frac{3}{2}$, 但是得到 $m = \frac{31}{24}$, 不扣分.

22. 解: (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1$, 则 $f'(x) = x - \sin x$ 1分

令函数 $g(x) = x - \sin x$, 则 $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, 可得 $g(x)$ 单调递增. 2分

又 $g(0) = 0$, 所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $g(x) < 0$ 3分



所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递增区间为 $(0, +\infty)$ 4 分

(2) 若 $a=0$, 则 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, 此时 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 故 $a \neq 0$ 5 分

$f'(x)=x-a\sin ax$, 令函数 $h(x)=x-a\sin ax$, 则 $h'(x)=1-a^2\cos ax=1-a^2\cos |a|x$.
..... 6 分

令函数 $\varphi(x)=1-a^2\cos |a|x (a \neq 0)$, 可知 $\varphi(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{|a|})$ 上单调递增. 7 分

① 当 $\varphi(0)=1-a^2 \geq 0$ 且 $a \neq 0$, 即 $-1 \leq a \leq 1$ 且 $a \neq 0$ 时, $\varphi(x) \geq \varphi(0) \geq 0$, 此时 $h(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{|a|})$ 上单调递增, 则 $h(x) \geq h(0)=0$, 此时 $x=0$ 不可能是 $f(x)$ 的极大值点. 8 分

② 当 $\varphi(0)=1-a^2 < 0$, 即 $a < -1$ 或 $a > 1$ 时, 由 $\varphi(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{|a|})$ 上单调递增, 可知存在 $m \in (0, \frac{\pi}{|a|})$, 使得当 $x \in [0, m)$ 时, $\varphi(x) < 0$, 则 $h(x)$ 在 $[0, m)$ 上单调递减, 9 分

从而 $h(x) \leq h(0)=0$, 即 $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 在 $[0, m)$ 上单调递减. 10 分

由 $f(-x)=\cos(-ax)+\frac{1}{2}(-x)^2-1=\cos ax+\frac{1}{2}x^2-1=f(x)$, 可得 $f(x)$ 为偶函数, $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 此时 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点. 11 分

综上, a 的取值范围为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 12 分
评分细则:

【1】第(1)问中, 最后没有回答函数的单调区间, 而是写为“ $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增”不扣分.

【2】第(2)问中, 在说明 $a \neq 0$ 后, 也可以先讨论 $a > 0$, 再根据函数的奇偶性, 确定 $a < 0$ 中满足条件的 a 的范围, 最后求两种情况的 a 的取值集合的并集, 即得满足题意的 a 的取值范围.

