

梧州市 2023 届高三第三次模拟测试

理科数学

(全卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟)

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将姓名、座位号、考籍号填写在答题卡上。
2. 考生作答时, 请在答题卡上作答(答题注意事项见答题卡), 在本试题上作答无效。

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每个小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | -2 < x \leq 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1\}$, 则 $A \cap B =$

✓ A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{-1, 0, 1\}$ C. $\{-1, 0\}$ D. $\{-2, -1, 0\}$

2. 若 a 为实数, 且 $\frac{a+i}{1-i} - 1 = 2i$, 则 $a =$

✓ A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

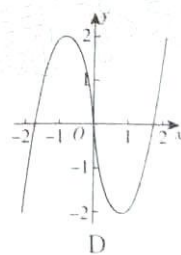
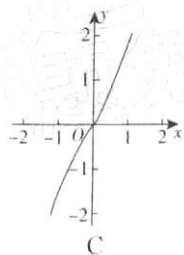
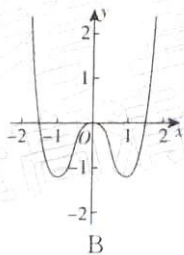
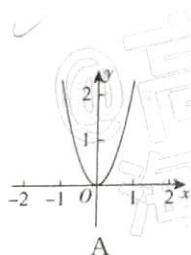
3. 二十四节气歌是为了方便记忆我国古代历法中的二十四个节气而编成的小诗歌, 体现着我国古代劳动人民的智慧. 四句诗歌“春雨惊春清谷天, 夏满芒夏暑相连; 秋处露秋寒霜降, 冬雪雪冬小大寒”中, 每一句诗歌的开头一字代表着季节, 每一句诗歌包含了这个季节中的 6 个节气. 若从 24 个节气中任选 2 个节气, 这 2 个节气恰好在一个季节的概率为

✓ A. $\frac{1}{46}$ B. $\frac{5}{23}$ C. $\frac{1}{23}$ D. $\frac{1}{6}$

4. 若 $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin 2\alpha =$

✓ A. $\frac{7}{25}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $-\frac{1}{5}$ D. $-\frac{7}{25}$

5. 函数 $y = x(e^x - e^{-x})$ 的图象大致为



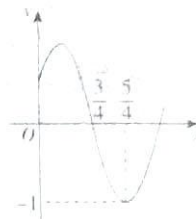
6. 为了简化运算问题, 数学家纳皮尔发明了对数, 后来数学家欧拉发现了指数与对数的互逆关系, 并指出: 对数源于指数. 法国数学家马丁·梅森在研究素数方面成就很高, 部分素数可以写成“ $2^p - 1$ ”的形式(p 是素数), 被后人称为梅森素数. 已知第 20 个梅森素数为 $S = 2^{4423} - 1$, 第 21 个梅森素数为 $T = 2^{9689} - 1$, 根据指数与对数的关系, 估计 $\frac{T}{S+1}$ 的值约为(参考数据:

lg 2 \approx 0.301, lg 3 \approx 0.477)

✓ A. 10^{1570} B. 10^{1580} C. 10^{1585} D. 10^{1590}

7. 已知向量 $a=(1,2)$, $b=(m,3)$, 若 $a \perp (2a-b)$, 则 a 与 b 夹角的余弦值为
 A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
8. 已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_2=20$, $a_3=14$, 则满足 $S_n < 0$ 的 n 的最小值为
 A. 8 B. 16 C. 17 D. 18
9. 已知直线 $l: 2x+y-2=0$ 是圆 $C: (x-3)^2+(y-b)^2=6$ 的一条对称轴, 设直线 l 与 x 轴的交点为 P , 将直线 l 绕点 P 按顺时针方向旋转 30° 得到直线 l' , 则直线 l' 被圆 C 截得的弦长为
 A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

10. 函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$ ($A>0, \omega>0, -\frac{\pi}{2}<\varphi<0$) 的部分图象如图



所示, 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[0, m]$ 有且仅有 3 个最大值点, 则下列说法错误的个数是

- ① 函数 $|f(x)|$ 的最小正周期为 2;
 ② 点 $(-\frac{9}{4}, 0)$ 为 $f(x)$ 的一个对称中心;
 ③ 函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{3}{2}$ 个单位后得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象;
 ④ 函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{3}{25}m, 0]$ 上是增函数.
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
11. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a>0, b>0$) 的左、右焦点, 过 F_1 的直线分别交双曲线左、右两支于 A, B 点, 点 C 在 x 轴上, $\vec{CB} = 3\vec{F_2A}$, BF_2 平分 $\angle F_1BC$, 则双曲线 E 的离心率为
 A. $\sqrt{7}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$
12. 已知函数 $g(x), h(x)$ 分别是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数和奇函数, 且 $g(x)+h(x)=e^x+x$, 若函数 $f(x)=e^{x-1}+\lambda g(x-1)-2\lambda^2$ 有唯一零点, 则正实数 λ 的值为
 A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

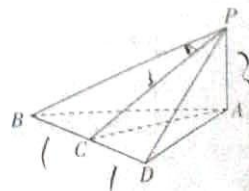
二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 直线 $y=x-1$ 过抛物线 $C: y^2=2px$ ($p>0$) 的焦点 F , 且与 C 交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ _____.

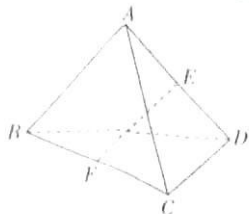
14. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-2y+1 \geq 0, \\ x+2y+1 \geq 0, \\ x-1 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z=ax+by$ ($a>b>0$) 取最大值 4 时, $\frac{4}{a} + \frac{1}{b}$

的最小值为 _____.

15. 我国无人机技术处于世界领先水平, 并广泛民用于抢险救灾、视频拍摄、环保监测等领域. 如图, 有一个从地面 A 处垂直上升的无人机 P , 对地面 B, C 两受灾点的视角为 $\angle BPC$, 且 $\tan \angle BPC = \frac{1}{3}$, 无人机对地面受灾 D 点的俯角为 30° . 已知地面上三处受灾点 B, C, D 共线, 且 $\angle ADB = 90^\circ$, $BC = CD = 1$ km, 则无人机 P 到地面的距离 $PA =$ $\frac{10}{3}$ km.



16. 如图, 已知四面体 $ABCD$ 中, $AB=AC=BD=CD=2\sqrt{2}$, $AD=BC=2$, E, F 分别是 AD, BC 的中点. 若用一个与直线 EF 垂直, 且与四面体的每一个面都相交的平面 α 去截该四面体, 由此得到一个多边形截面, 则该多边形截面面积的最大值为_____.

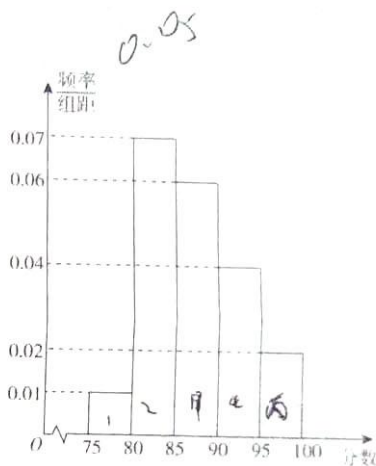


- 三、解答题: 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (本题满分 12 分)

某单位组织全体党员开展“学党史, 知党情, 感党恩”系列活动. 在学党史知识竞赛中, 共设置 20 个小题, 每个小题 5 分. 随机对 100 名党员的成绩进行统计, 成绩均在 $[75, 100]$ 内. 现将成绩分成 5 组, 按照下面分组进行统计分析: 第 1 组 $[75, 80)$, 第 2 组 $[80, 85)$, 第 3 组 $[85, 90)$, 第 4 组 $[90, 95)$, 第 5 组 $[95, 100]$, 并绘制成如图所示的频率分布直方图. 已知甲、乙、丙分别在第 3、4、5 组, 现在用分层抽样的方法在第 3、4、5 组共选取 6 人 (包含甲、乙、丙) 参加党史知识抢答赛.



- (1) 求第 4 组选取参加抢答赛的人数; ✓
(2) 若从参加抢答赛的 6 人中随机选取两人参加上级部门的党史知识复赛, 求甲、乙、丙 3 人至多有一人被选取的概率. ✓

18. (本题满分 12 分)

在① $a_3 + a_5 = 14$; ② $S_4 = 16$; ③ a_8 是 a_5 与 a_{13} 的等比中项, 三个条件中任选一个, 补充在下面问题的横线上, 并给出解答.

问题: 已知 $\{a_n\}$ 为公差不为零的等差数列, 其前 n 项和为 S_n , $\{b_n\}$ 为等比数列, 其前 n 项和 $T_n = 2^n + \lambda$, λ 为常数, $a_1 = b_1$, $S_4 = 16$.

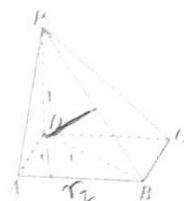
- (1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式; ✓
(2) 令 $c_n = [\lg a_n]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 求 $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{100}$ 的值.
注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

19. (本题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $PD=AD=BD=1, AB=\sqrt{2}$.

(1) 求证: 平面 $PBD \perp$ 平面 PBC ;

(2) 试问在线段 PC 上是否存在一点 M , 使得二面角 $M-BD-C$ 的大小为 60° ? 若存在, 求出 $\frac{PM}{MC}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.



20. (本题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知定点 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$, 动点 M 满足 $|MF_1| + |MF_2| = 2\sqrt{2}$. 记点 M 的轨迹为 C .

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 经过 F_1 且不垂直于坐标轴的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, x 轴上点 P 满足 $|PA| = |PB|$, 证明: $\frac{|AB|}{|F_1P|}$ 为定值, 并求出该值.

$$\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c}\right) [(a+b)(b+c)]^2$$

21. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = xe^x - ae^{2x}$.

(1) 若 $a = \frac{1}{2}$, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq \frac{2}{a}$, 求实数 a 的取值范围.

$$\frac{2a+b}{a+b} = a+b+b+c \geq$$

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (本题满分 10 分)

在平面直角坐标系中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta = 3$.

(1) 求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2) 曲线 C_1 与 C_2 相交于 A, B 两点, 求 $|OA| \cdot |OB|$ 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = 2|x-1| - x$.

(1) 求不等式 $f(x) < 2x - 4$ 的解集; $x > \frac{6}{5}$

(2) 已知函数 $f(x)$ 的最小值为 m , 且 a, b, c 都是正数, $a + 2b + c = -m$, 证明: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} \geq 4$.

$$m = -1$$

梧州市 2023 届高三第三次模拟测试 · 理科数学 第 4 页 (共 4 页)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

