2024届新高三开学摸底考试卷（新高考专用）01

数学·参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	C	D	A	D	C	B	D	BC	BC	BD	BCD

13．36

14．$\frac{56}{3}$

15．$\left(\frac{13}{6},\frac{8}{3}\right]$

16．$\sqrt{5}-1$

17．(1) $\frac{\pi}{3}$

(2) $6\sqrt{2}$．

【详解】（1）由正弦定理得 $\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{\sin A+2\sin B\cos A}{2\sin A}$，所以

$\sin A+2\sin B\cos A=2\sin C=2\sin(A+B)=2\sin A\cos B+2\cos A\sin B$，

得 $\sin A=2\sin A\cos B$，因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A\neq 0$，

得 $\cos B=\frac{1}{2}$，又 $0<B<\pi$，

所以 $B=\frac{\pi}{3}$．

（2）由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=2\sqrt{3}$，得 $ac=8$，

由余弦定理 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，得 $a^2+c^2-8=ac$，

得 $(a+c)^2=3ac+8=32$，

得 $a+c=4\sqrt{2}$，

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $6\sqrt{2}$．

18．(1) 略 (2) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

【解析】(1) $\because AD//BC$，Q 为 AD 的中点，$BC=\dfrac{1}{2}AD$，

$\therefore BC//QD$，$BC=QD$，

$\therefore$ 四边形 $BCDQ$ 为平行四边形，$\therefore BQ//CD$．

$\because \angle ADC=90^\circ$，$\therefore BC\perp BQ$．

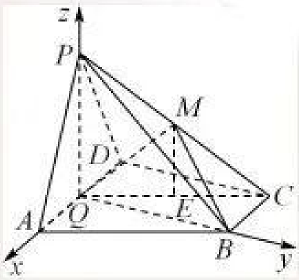
$\because PA=PD$，$AQ=QD$，$\therefore PQ\perp AD$．

又$\because$ 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

$\therefore PQ\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore PQ\perp BC$．又$\because PQ\cap BQ=Q$，$\therefore BC\perp$ 平面 PQB．

$\because BC\subset$ 平面 PBC，$\therefore$ 平面 $PBC\perp$ 平面 PQB．

(2)由(1)可知 $PQ\perp$ 平面 $ABCD$．如图，以 Q 为原点，分别以 QA，QB，QP 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系．



则 $Q(0,0,0)$，$D(-1,0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$C(-1,\sqrt{3},0)$，

$\therefore \overrightarrow{QB}=(0,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{DC}=(0,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{DP}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PC}=(-1,\sqrt{3},-\sqrt{3})$，

$PC=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$．

设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$，则 $\overrightarrow{PM}=(-\lambda,\sqrt{3}\lambda,-\sqrt{3}\lambda)$，且 $0<\lambda<1$，得 $M(-\lambda,\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$，

$\therefore \overrightarrow{QM}=(-\lambda,\sqrt{3}\lambda,\sqrt{3}(1-\lambda))$．

设平面 MBQ 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{QM}\cdot\vec{m}=0,\\ \overrightarrow{QB}\cdot\vec{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\lambda x+\sqrt{3}\lambda y+\sqrt{3}(1-\lambda)z=0,\\ \sqrt{3}y=0,\end{cases}$

令 $x=\sqrt{3}$，则 $y=0$，$z=\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$，

$\therefore$ 平面 MBQ 的一个法向量为 $\vec{m}=(\sqrt{3},0,\frac{\lambda}{1-\lambda})$.

设平面 PDC 的法向量为 $\vec{n}=(x',y',z')$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\vec{n}=0,\\ \overrightarrow{DP}\cdot\vec{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}y'=0,\\ x'+\sqrt{3}z'=0,\end{cases}$

令 $x'=3$，则 $y'=0$，$z'=-\sqrt{3}$，

$\therefore$ 平面 PDC 的一个法向量为 $\vec{n}=(3,0,-\sqrt{3})$.

$\therefore$ 平面 QMB 与平面 PDC 所成的锐二面角的大小为 $60°$，

$$\therefore \cos 60°=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\frac{|3\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\frac{\lambda}{1-\lambda}|}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{3+(\frac{\lambda}{1-\lambda})^2}}=\frac{1}{2},$$

$\therefore \lambda=\frac{1}{2}$.

$\therefore PM=\frac{1}{2}PC=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

即当 $PM=\frac{\sqrt{7}}{2}$ 时，平面 QMB 与平面 PDC 所成的角大小为 $60°$

19. 【答案】(1)$a\le 0$ 时，$f(x)$在$(-\infty，+\infty)$上单调递增，

当 $a>0$ 时，$f(x)$在$(-\infty，\ln a)$上单调递减，在$(\ln a，+\infty)$上单调递增

(2)见解析

【详解】(1)解　函数 $f(x)=e^x-ax-a$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，求导得 $f'(x)=e^x-a$，

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，即 $f(x)$在$(-\infty，+\infty)$上单调递增，

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=e^x-a>0$，解得 $x>\ln a$，令 $f'(x)<0$，解得 $x<\ln a$，

即 $f(x)$在$(-\infty，\ln a)$上单调递减，在$(\ln a，+\infty)$上单调递增，

所以当 $a\le 0$ 时，$f(x)$在$(-\infty，+\infty)$上单调递增，

当 $a>0$ 时，$f(x)$在$(-\infty，\ln a)$上单调递减，在$(\ln a，+\infty)$上单调递增.

(2)证明　当 $a=1$ 时，$g(x)=\frac{2\ \ e^x-x-1}{x^2}$，

当 $x>0$ 时，$\frac{2\ \ e^x-x-1}{x^2}>1\Leftrightarrow e^x>1+x+\frac{x^2}{2}\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{2}x^2+x+1}{e^x}<1$，

令 $F(x)=\frac{\frac{1}{2}x^2+x+1}{e^x}-1$，$x>0$，$F'(x)=\frac{-\frac{1}{2}x^2}{e^x}<0$ 恒成立，则 $F(x)$在$(0，+\infty)$上单调递减，

$F(x)<F(0)=\frac{1}{e^0}-1=0$，因此$\frac{\frac{1}{2}x^2+x+1}{e^x}<1$成立，

所以当 $x>0$ 时，$g(x)>1$，即原不等式得证．

20.【答案】(1) $a_n=\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$

(2) $T_n=\frac{4^n-1+6n}{9}$

【详解】(1)) 因为$S_6-S_3=6$，所以$a_4+a_5+a_6=6$，

所以$a_4+a_5+a_6=3a_5=6 \Rightarrow a_5=2$.

所以$d=\frac{a_5-a_3}{5-3}=\frac{1}{2} \Rightarrow a_n=a_3+(n-3)d=\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$.

则数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$.

(2) 因为数列$\{a_{m_n}\}$是以首项为a_1，公比为 4 等比数列.

所以$a_{m_n}=4a_{m_{n-1}}$、$a_{m_1}=a_1 \Rightarrow m_1=1$.

因为数列$\{a_n\}$是等差数列，所以$a_1+(m_n-1)d=4[a_1+(m_{n-1}-1)d]$.

化简得$m_n=\frac{3a_1}{d}+4m_{n-1}-3$.

因为$a_2=a_1+d=4a_1$，所以$\frac{a_1}{d}=\frac{1}{3}$，即$m_n=4m_{n-1}-2$.

所以$m_n-\frac{2}{3}=4\left(m_{n-1}-\frac{2}{3}\right)$.

因为$m_1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，所以数列$\left\{m_n-\frac{2}{3}\right\}$是以$\frac{1}{3}$为首项．4 为公比的等比数列

所以$m_n-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\cdot 4^{n-1} \Rightarrow m_n=\frac{1}{3}\cdot 4^{n-1}+\frac{2}{3}$.

所以$T_n=m_1+m_2+\cdots+m_n=\frac{1}{3}\left(4^0+4^1+\cdots 4^{n-1}\right)+\frac{2n}{3}=\frac{4^n-1+6n}{9}$.

则数列$\{m_n\}$的前 n 项和T_n为：$T_n=\frac{4^n-1+6n}{9}$.

21．【答案】(1)分布列见解析，$\frac{5}{2}$

(2)（i）$\frac{1}{2}<p<1$；（ii）证明见解析，比赛局数越多，对实力较强者越有利

【详解】（1）$p=\frac{1}{2}, n=2$，即采用 3 局 2 胜制，X 所有可能取值为2,3，

$$P(X=2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}, P(X=3)=C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)+C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2},$$

X 的分布列如下表：

X	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

所以 X 的数学期望为 $E(X)=2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.

（2）采用 3 局 2 胜制：不妨设赛满 3 局，用 ξ 表示 3 局比赛中甲胜的局数，则 $\xi \sim B(3,p)$，甲最终获胜的概率为：

$$p_1=P(\xi=2)+P(\xi=3)=C_3^2p^2(1-p)+C_3^3p^3=p^2\left[C_3^2(1-p)+C_3^3p\right]=p^2(3-2p),$$

采用 5 局 3 胜制：不妨设赛满 5 局，用 η 表示 5 局比赛中甲胜的局数，则 $\eta \sim B(5,p)$，甲最终获胜的概率为：

$$p_2=P(\eta=3)+P(\eta=4)+P(\eta=5)=C_5^3p^3(1-p)^2+C_5^4p^4(1-p)+C_5^5p^5$$

$$=p^3\left[C_5^3(1-p)^2+C_5^4p(1-p)+C_5^5p^2\right]=p^3\left(6p^2-15p+10\right),$$

$$p_2-p_1=p^3\left(6p^2-15p+10\right)-p^2(3-2p)=p^2\left(6p^3-15p^2+10p-3+2p\right)$$

$$=3p^2\left(2p^3-5p^2+4p-1\right)=3p^2(p-1)\left(2p^2-3p+1\right)=3p^2(1-p)^2(2p-1)>0,$$

得 $\frac{1}{2}<p<1$.

（ii）由（i）知 $\frac{1}{2}<p<1$.

$2n-1$ 局比赛中恰好甲赢了 n 局的概率为 $q_1=C_{2n-1}^{n}p^n(1-p)^{n-1}$，

$2n-1$ 局比赛中恰好甲赢了 $n-1$ 局的概率为 $q_2=C_{2n-1}^{n-1}p^{n-1}(1-p)^n$，

则 $2n-1$ 局比赛中甲至少赢 $n+1$ 局的概率为 P_n-q_1.

考虑 $2n+1$ 局比赛的前 $2n-1$ 局：

如果这 $2n-1$ 局比赛甲至少赢 $n+1$ 局，则无论后面结果如何都胜利，其概率为 P_n-q_1，

如果这 $2n-1$ 局比赛甲赢了 n 局，则需要后两场至少赢一局，其概率为 $q_1\left[1-(1-p)^2\right]$，

如果这 $2n-1$ 局比赛甲赢了 $n-1$ 局，则需要后两场都赢，其概率为 q_2p^2，

因此 $2n+1$ 局里甲最终获胜的概率为：$P_{n+1}=(P_n-q_1)+q_1\left[1-(1-p)^2\right]+q_2p^2$，

$$P_{n+1}-P_n=-q_1+q_1\left[1-(1-p)^2\right]+q_2p^2=q_2p^2-q_1(1-p)^2$$
$$=\mathrm{C}_{2n-1}^{n-1}p^{n-1}(1-p)^n\cdot p^2-\mathrm{C}_{2n-1}^{n}p^n(1-p)^{n-1}\cdot(1-p)^2$$
$$=\mathrm{C}_{2n-1}^{n-1}p^{n+1}(1-p)^n-\mathrm{C}_{2n-1}^{n}p^n(1-p)^{n+1}$$
$$=\mathrm{C}_{2n-1}^{n-1}p^n(1-p)^n\left[p-(1-p)\right]=\mathrm{C}_{2n-1}^{n-1}p^n(1-p)^n(2p-1)>0$$

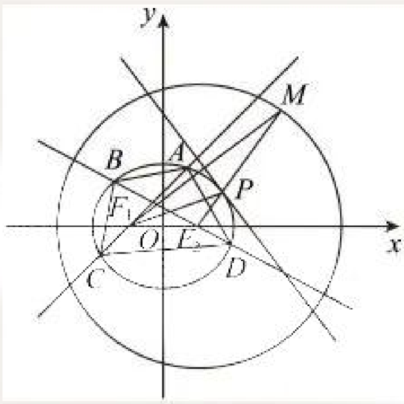
因此 $P_{n+1}>P_n$，即数列 $\{P_n\}$ 单调递增.

该结论的实际意义是：比赛局数越多，对实力较强者越有利.

22. 【答案】(1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

(2) $S\in\left(6,\dfrac{7\sqrt{3}}{2}\right]$

【详解】（1）



因为线段 F_1M 的垂直平分线交半径 F_2M 与点 P，

所以 $|PM|=|PF_1|$，

所以 $|PF_1|+|PF_2|=|MF_2|=4$ 是定值，$F_1F_2=2<4$，

所以 P 点轨迹为椭圆，其长轴为 4，焦距为 2，

所以 P 的轨迹 Q 的方程 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）解法一

设 $A(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$.由已知得：直线 l_1 的方程为 $x=ky-1$；

设 $B(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$.由已知得：直线 l_2 的方程为 $x=my+1$,

又因为 AC、BD 斜率之积为 $-\dfrac{3}{4}$，所以 $\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{1}{m}=-\dfrac{3}{4}\Rightarrow m=-\dfrac{4}{3k}$,

由 $\begin{cases}x=ky-1\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $3(ky-1)^2+4y^2-12=0$，即 $(3k^2+4)y^2-6ky-9=0$，

所以 $\Delta=36k^2+36(3k^2+4)=144(k^2+1)$，

$y_1+y_2=\frac{6k}{3k^2+4}, x_1x_2=\frac{-9}{3k^2+4}$.

故 $|AC|=\sqrt{1+k^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{12(k^2+1)}{3k^2+4}$

同理联立 BD 与椭圆方程，可得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，

所以 $\Delta_1=144(m^2+1)$，

故 $|y_3-y_4|=\sqrt{(y_3+y_4)^2-4y_3y_4}=\frac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$

设 d_1,d_2 分别为点 B,D 到直线 l_1 的距离，

则 $S_{ABCD}=S_{\triangle CAB}+S_{\triangle CAD}=\frac{1}{2}|AC|(d_1+d_2)$.

又 B,D 在直线 AC 在异侧，则

$$d_1+d_2=\frac{|-x_3+ky_3+1|}{\sqrt{1+k^2}}+\frac{|-x_4+ky_4+1|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|(k-m)(y_3-y_4)|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\left|\left(k+\frac{4}{3k}\right)\right|}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\frac{12\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$$

$$=\frac{\sqrt{9k^2+16}}{\sqrt{1+k^2}}$$

所以 $S_{ABCD}=\frac{1}{2}|AC|\cdot(d_1+d_2)=\frac{6(k^2+1)}{3k^2+4}\frac{\sqrt{9k^2+16}}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{6\sqrt{(9k^2+16)(k^2+1)}}{3k^2+4}$，

令 $3k^2+4=t, t>4, S_{ABCD}=2\sqrt{3}\times\sqrt{-4\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{1}{t}+3}=2\sqrt{3}\times\sqrt{-4\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{49}{16}}$

易知 $\frac{1}{t}\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$，所以 $-4\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{49}{16}\in\left(3,\frac{49}{16}\right]$，

所以 $S_{ABCD}\in\left(6,\frac{7\sqrt{3}}{2}\right]$

解法二

设 $\begin{cases}x_0=x\\ y_0=\frac{2}{\sqrt{3}}y\end{cases}$，所以 $x_0^2+y_0^2=4$，设圆心为 O'，

因为直线 l_1,l_2 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$，

所以 $k_1'\cdot k_2'=\frac{2}{\sqrt{3}}k_1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}k_2=-1$，

设直线 $A'C'$ 方程 $y=k(x+1)$，

点 O' 到 $A'C'$ 的距离为 $d=\dfrac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}$，

所以 $|A'C'|=2\sqrt{4-\dfrac{k^2}{k^2+1}}=2\sqrt{3+\dfrac{1}{k^2+1}}$，

同理 $|B'D'|=2\sqrt{4-\dfrac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}+1}}=2\sqrt{4-\dfrac{1}{k^2+1}}$，

设四边形 $A'B'C'D'$ 面积为 S'，

则 $S'=\dfrac{1}{2}|A'C'|\cdot|B'D'|=2\sqrt{\left(4-\dfrac{1}{k^2+1}\right)\left(3+\dfrac{1}{k^2+1}\right)}$，

令 $t=\dfrac{1}{k^2+1}$，则 $t\in(0,1)$，

所以 $S'=2\sqrt{(4-t)(3+t)}=2\sqrt{-t^2+t+12}=2\sqrt{-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{49}{4}}$，

所以 $S'\in\left(4\sqrt{3},7\right]$，

设四边形 $ABCD$ 面积为 S，因为 $S'=\dfrac{2}{\sqrt{3}}S$，

所以 $S\in\left(6,\dfrac{7\sqrt{3}}{2}\right]$.

关于我们

全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。