

# 2022 学年第二学期期末调研测试卷

## 高二数学

本试卷共 6 页, 22 小题, 满分 150 分. 考试用时 120 分钟.

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上.

2. 作答选择题时, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答, 答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上. 不按以上要求作答的答案无效.

一、单项选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $A = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 - x - 2 \leq 0\}$ ,  $B = \{x | x < 1\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $\{-1, 0, 1, 2\}$       B.  $\{-1, 0\}$       C.  $[-2, 1)$       D.  $[-1, 1)$

2. 已知复数  $z$  满足  $(1-i)(i-z) = 3+i$  ( $i$  是虚数单位), 则复数  $z$  的共轭复数  $\bar{z} =$  ( )

- A.  $-1-2i$       B.  $-1+2i$       C.  $-1-i$       D.  $-1+i$

3. 设  $a = \log_2 6$ ,  $b = \log_5 15$ ,  $c = \log_7 21$ , 则 ( )

- A.  $a > b > c$       B.  $a > c > b$       C.  $b > c > a$       D.  $c > b > a$

4. 国家于 2021 年 8 月 20 日表决通过了关于修改人口与计划生育法的决定, 修改后的人口计生法规定, 国家提倡适龄婚育、优生优育, 一对夫妻可以生育三个子女, 该政策被称为三孩政策. 某个家庭积极响应该政策, 一共生育了三个小孩, 假定生男孩和生女孩是等可能的, 记事件  $A$ : 该家庭既有男孩又有女孩; 事件  $B$ : 该家庭最多有一个男孩; 事件  $C$ : 该家庭最多有一个女孩. 则下列说法正确的是 ( )

- A. 事件  $B$  与事件  $C$  互斥但不对立      B. 事件  $A$  与事件  $B$  互斥且对立  
C. 事件  $B$  与事件  $C$  相互独立      D. 事件  $A$  与事件  $B$  相互独立

5. 已知函数  $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$  ( $\omega > 0$ ) 对任意  $x \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$  都有  $f(x) > \frac{1}{2}$ , 则当  $\omega$  取到最大值时, 函数

$f(x)$  图象的一条对称轴是 ( )

- A.  $x = \frac{9\pi}{28}$       B.  $x = \frac{27\pi}{28}$       C.  $x = \frac{9\pi}{20}$       D.  $x = \frac{27\pi}{20}$

6. 已知单位向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  满足  $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{7}$ , 则  $\vec{a}$  在  $\vec{b}$  上的投影向量是 ( )

- A.  $\frac{1}{2}a$                       B.  $-\frac{1}{2}a$                       C.  $\frac{1}{2}b$                       D.  $-\frac{1}{2}b$

7. 7个人站成一排准备照一张合影，其中甲、乙要求相邻，丙、丁要求分开，则不同的排法有 ( )

- A. 400种                      B. 720种                      C. 960种                      D. 1200种

8. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ，若  $f(2x+1)$  为偶函数， $f(x+2)$  为奇函数，则 ( )

- A.  $f(-1)=0$                       B.  $f(1)=0$                       C.  $f(2022)=0$                       D.  $f(2023)=0$

**二、多项选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，至少有两个是符合题目要求的，全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分。**

9. 2023年6月18日，很多商场都在搞“618”促销活动。市物价局派人对5个商场某商品同一天的销售量及其价格进行调查，得到该商品的售价  $x$  元和销售量  $y$  件之间的一组数据（如表所示），用最小二乘法求得  $y$  关于  $x$  的经验回归直线是  $\hat{y} = -0.32x + \hat{a}$ ，相关系数  $r = -0.9923$ ，则下列说法正确的有 ( )

$x$	90	95	100	105	110
$y$	11	10	8	6	5

- A. 变量  $x$  与  $y$  负相关且相关性较强                      B.  $\hat{a} = 40$
- C. 当  $x = 75$  时， $y$  的估计值为 14.5                      D. 相应于点  $(95, 10)$  的残差为 0.4

10. 已知函数  $f(x)$  的图象是由函数  $y = 2\sin x \cos x$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位得到，则 ( )

- A.  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$
- B.  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$  上单调递增
- C.  $f(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{\pi}{3}$  对称
- D.  $f(x)$  的图象关于点  $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$  对称

11. 已知  $a > 0$ ， $b > 0$ ，且  $a^2 + b = 1$ ，则 ( )

- A.  $a^2 - b \leq -1$                       B.  $\frac{1}{2} < 2^{a-\sqrt{b}} < 2$
- C.  $a + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$                       D.  $\log_2 a + \log_2 \sqrt{b} > -1$

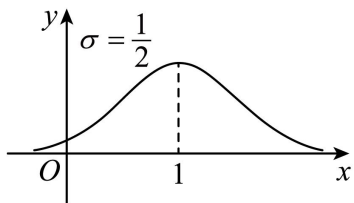
12. 已知函数  $f(x) = |e^x - 1|$ ,  $x_1 < 0$ ,  $x_2 > 0$ , 函数  $y = f(x)$  的图象在点  $A(x_1, f(x_1))$  处的切线与在点  $B(x_2, f(x_2))$  处的切线互相垂直, 且分别与  $y$  轴交于  $M$ 、 $N$  两点, 则 ( )

- A.  $x_1 + x_2$  为定值  
 B.  $x_1 x_2$  为定值  
 C. 直线  $AB$  的斜率取值范围是  $(0, +\infty)$   
 D.  $\frac{|AM|}{|BN|}$  的取值范围是  $(0, 1)$

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知  $\left(x - \frac{1}{x^3}\right)^n$  ( $n \in \mathbf{N}_+, 3 \leq n \leq 16$ ) 的展开式中含有常数项, 则  $n$  的一个可能取值是\_\_\_\_\_.

14. 设随机变量  $\xi$  服从正态分布,  $\xi$  的分布密度曲线如图所示, 若  $P(\xi < 0) = p$ , 则  $P(0 < \xi < 1) =$ \_\_\_\_\_,  
 $D(\xi) =$ \_\_\_\_\_.



15. 湖州地区甲、乙、丙三所学科基地学校的数学强基小组人数之比为  $3:2:1$ , 三所学校共有数学强基学生 48 人, 在一次统一考试中, 所有学生的成绩平均分为 117, 方差为 21.5, 已知甲、乙两所学校的数学强基小组学生的平均分分别为 118 和 114, 方差分别为 15 和 21, 则丙学校的学生成绩的方差是\_\_\_\_\_.

16. 在四面体  $ABCD$  中,  $AB = CD = \sqrt{3}$ ,  $BC = 2\sqrt{3}$ , 且  $AB \perp BC$ ,  $CD \perp BC$ , 异面直线  $AB$ ,  $CD$  所成角为  $\frac{\pi}{3}$ , 则该四面体外接球的表面积是\_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 设袋子中装有大小相同的 6 个红球和 4 个白球, 现从袋中任取 4 个小球 (每球取出的机会均等).

- (1) 求取出的 4 个小球中红球个数比白球个数多的概率;  
 (2) 若取出一个红球记 2 分, 取出一个白球记 1 分, 记  $X$  表示取出的 4 个球的总得分, 求随机变量  $X$  的分布列和数学期望.

18. 已知函数  $f(x) = \log_a \frac{2-x}{2+x}$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ).

- (1) 求函数  $f(x)$  的奇偶性;  
 (2) 若关于  $x$  的方程  $f(x) = \log_a(x-m)$  有实数解, 求实数  $m$  的取值范围.

19. 第 19 届亚运会将于 2023 年 9 月 23 日在杭州开幕, 本次亚运会共设 40 个大项, 61 个分项, 482 个小项. 为

调查学生对亚运会项目的了解情况，某大学进行了一次抽样调查，若被调查的男女生人数均为 $10n(n \in \mathbf{N}^*)$ ，

统计得到以下 $2 \times 2$ 列联表，经过计算可得 $K^2 \approx 4.040$ 。

	男生	女生	合计
了解	$6n$		
不了解		$5n$	
合计	$10n$	$10n$	

(1) 求 $n$ 的值，并判断有多大的把握认为该校学生对亚运会项目的了解情况与性别有关；

(2) ①为弄清学生不了解亚运会项目的原因，采用分层抽样的方法从抽取的不了解亚运会项目的学生中随机抽取9人，再从这9人中抽取3人进行面对面交流，“至少抽到一名女生”的概率；

②将频率视为概率，用样本估计总体，从该校全体学生中随机抽取10人，记其中对亚运会项目了解的人数为 $X$ ，求随机变量 $X$ 的数学期望。

附表：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
$k_0$	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

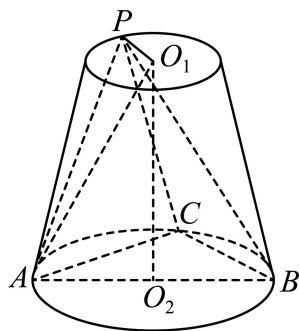
附：
$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

20. 记 $\triangle ABC$ 的内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ ，已知 $b + c = 2a \sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right)$ 。

(1) 求 $A$ ；

(2) 设 $AB$ 的中点为 $D$ ，若 $CD = a$ ，且 $b - c = 1$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

21. 如图，圆台 $O_1O_2$ 的上底面的半径为1，下底面的半径为 $\sqrt{2}$ ， $AB$ 是圆台下底面的一条直径， $PO_1$ 是圆台上底面的一条半径， $C$ 为圆 $O_2$ 上一点，点 $P, C$ 在平面 $AO_1O_2$ 的同侧，且 $AC = BC$ ， $PO_1 \parallel BC$ 。



(1) 证明:  $PO_1 \perp$  平面  $PAC$ ;

(2) 若三棱锥  $P-ABC$  的体积为  $\frac{4}{3}$ , 求平面  $PO_1A$  与平面  $PBC$  所成角的正弦值.

22 已知函数  $f(x) = e^x - ax$ ,  $g(x) = \ln x - ax$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

(1) 当  $a = 1$  时, 求函数  $y = f(g(x))$  的单调区间;

(2) 设函数  $h(x) = f(x) - g(x)$  的最小值为  $m$ , 求函数  $F(x) = e^x - e^m \ln x$  的最小值.

(其中  $e \approx 2.71828$  是自然对数的底数)

自主选拔在线  
微信号: zizzsw

自主选拔在线  
微信号: zizzsw

自主选拔在线  
微信号: zizzsw

自主选拔在线  
微信号: zizzsw