

2023 年甘肃省第一次高考诊断考试

理科数学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号框涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他.答案标号框.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

- 已知集合 $A = \{x | \log_2 x \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} | x < 4\}$, 则 $A \cap B$ 的子集个数为
A. 2 B. 3 C. 4 D. 8
- 复数 z_1, z_2 在复平面内对应的点关于虚轴对称,若 $z_1 = 1 - 2i$, i 为虚数单位,则 $z_1 \cdot z_2 =$
A. 5 B. -5
C. -5i D. 1 + 2i
- 已知 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的奇函数,当 $x > 0$ 时, $f(x) = 2^x$, 则 $f(-4) =$
A. 16 B. -16 C. $\frac{1}{16}$ D. $-\frac{1}{16}$
- 3 名男生和 2 名女生站一排照相,则 2 名女生互不相邻且都不站两端的站法有
A. 6 种 B. 12 种 C. 24 种 D. 36 种
- 已知焦点在 x 轴上的双曲线,焦距长为 4,一条渐近线的倾斜角是另一条渐近线倾斜角的 5 倍,则双曲线的实轴长为
A. $2\sqrt{3}$ B. 4 C. 2 D. $2\sqrt{6}$
- 已知 M, N, P 是正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AB, AA_1, CC_1 的中点,则平面 MNP 截正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面是
A. 三角形 B. 四边形 C. 五边形 D. 六边形
- 南宋数学家杨辉在《详解九章算法》中提出了垛积问题,涉及逐项差数之差或者高次差成等差数列的高阶等差数列. 现有一个高阶等差数列的前 6 项分别为 4, 7, 11, 16, 22, 29, 则该数列的第 18 项为
A. 172 B. 183 C. 191 D. 211
- 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,棱 $AD = 1$, 且其外接球的体积为 36π , 则此长方体体积的最大值为
A. $\frac{35}{6}$ B. $\frac{35}{2}$ C. 8 D. 4
- 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则满足 $\frac{f(x) - f(\frac{5\pi}{6})}{f(x) - f(\frac{5\pi}{12})} > 0$ 的

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (本小题满分 12 分)

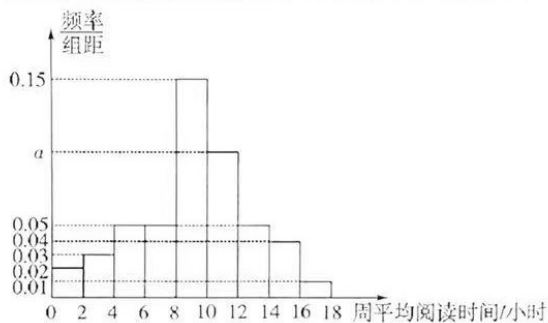
已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_6 = 2, S_5 = 5$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 + b_2 + \dots + b_n = 2^{n+1} - 2$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = \frac{1}{3a_n \cdot \log_2 b_{n+1}}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求满足 $T_n \geq \frac{2023}{2024}$ 的最小正整数 n .

18. (本小题满分 12 分)

“稻草很轻, 但是他迎着风仍然坚韧, 这就是生命的力量, 意志的力量” “当你为未来付出踏踏实实努力的时候, 那些你觉得看不到的人和遇不到的风景都终将在你生命里出现” …… 当读到这些话时, 你会切身体会到读书破万卷给予我们的力量. 为了解某普通高中学生的阅读时间, 从该校随机抽取了 800 名学生进行调查, 得到了这 800 名学生一周的平均阅读时间(单位: 小时), 并将样本数据分成九组, 绘制成如图所示的频率分布直方图.



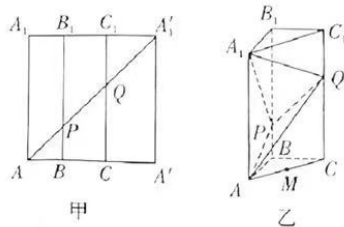
(1) 求 a 的值;

(2) 为进一步了解这 800 名学生阅读时间的分配情况, 从周平均阅读时间在 $(12, 14]$, $(14, 16]$, $(16, 18]$ 三组内的学生中, 采用分层抽样的方法抽取了 10 人, 现从这 10 人中随机抽取 3 人, 记周平均阅读时间在 $(14, 16]$ 内的学生人数为 X , 求 X 的分布列和数学期望;

(3) 以样本的频率估计概率, 从该校所有学生中随机抽取 20 名学生, 用 $P(k)$ 表示这 20 名学生中恰有 k 名学生周平均阅读时间在 $(8, 12]$ 内的概率, 其中 $k = 0, 1, 2, \dots, 20$. 当 $P(k)$ 最大时, 写出 k 的值.

19. (本小题满分 12 分)

如图甲所示的正方形 $AA_1A'_1A_1$ 中, $AA_1 = 12, AB = A_1B_1 = 3, BC = B_1C_1 = 4$, 对角线 AA_1' 分别交 BB_1, CC_1 于点 P, Q , 将正方形 $AA_1A'_1A_1$ 沿 BB_1, CC_1 折叠使得 AA_1 与 $A_1A'_1$ 重合, 构成如图乙所示的三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$.



(1) 若点 M 在棱 AC 上, 且 $AM = \frac{15}{7}$, 证明: $BM \parallel$ 平面 APQ ;

(2) 求平面 APQ 与平面 A_1PQ 所成角的余弦值.

20. (本小题满分 12 分)

已知动圆过定点 $(\frac{1}{2}, 0)$, 且与直线 $x = -\frac{1}{2}$ 相切.

(1) 求动圆圆心的轨迹 C 的方程;

(2) 过点 $T(1, 0)$ 且斜率为 k_1, k_2 的两条直线分别交曲线 C 于点 A, B, M, N , 点 P, Q 分别是线段 AB, MN 的中点, 若 $k_1 + k_2 = 2$, 求点 T 到直线 PQ 的距离的最大值.

21. (本小题满分 12 分)

已知 $f(x) = a \ln x (a > 0)$.

(1) 求证: 当 $a = 1$ 时, $f(x) \leq x - 1$;

(2) 若对于 $\forall x \in (0, +\infty)$, $f(x) \leq x$ 恒成立.

① 求 a 的最大值;

② 当 a 取最大值时, 若函数 $H(x) = \frac{e+1}{2}x^2 - 2xf(x)$, 求证: 对于 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty) (x_1 \neq x_2)$, 恒

有 $\frac{H(x_1) - H(x_2)}{x_1 - x_2} > -e$ (e 为自然对数的底).

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中选定一题作答, 并用 2B 铅笔在答题卡上将所选题目对应的题号方框涂黑. 按所涂题号进行评分, 不涂、多涂均按所答第一题评分; 多答按所答第一题评分.

22. (本小题满分 10 分) [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 + 2\cos\alpha \\ y = 3 + 2\sin\alpha \end{cases}$ (其中 α 为参数). 以坐标原点

O 为极点, x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $3\rho\cos\theta + 4\rho\sin\theta + 6 = 0$.

(1) 将圆 C 的参数方程化为普通方程, 直线 l 的极坐标方程化为直角坐标方程;

(2) 若 M 是直线 l 上任意一点, 过 M 作 C 的切线, 切点为 A, B , 求四边形 $AMBC$ 面积的最小值.

23. (本小题满分 10 分) [选修 4-5: 不等式选讲]

已知函数 $f(x) = |x - 2| - 2|x - 1|, x \in \mathbf{R}$.

(1) 求不等式 $f(x) \leq 4x + 1$ 的解集;

(2) 若对于 $\forall x \in \mathbf{R}, a^2 - a > f(x) + |x - 2|$, 求 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线