

2023 学年第一学期浙江省精诚联盟 10 月联考

高二年级数学学科 试题

考生须知:

1. 本卷共 4 页满分 150 分, 考试时间 120 分钟。
2. 答题前, 在答题卷指定区域填写班级、姓名、考场号、座位号及准考证号并填涂相应数字。
3. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试卷上无效。
4. 考试结束后, 只需上交答题纸。

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合要求的.

1. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 0, 1)$, 则 $\vec{a} + 2\vec{b} =$ ()

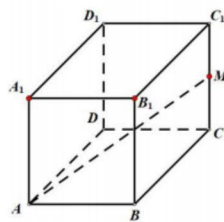
- A. $(-1, 4, 5)$ B. $(-1, 2, 5)$ C. $(1, 2, 5)$ D. $(1, 4, 5)$

2. 圆 $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$ 的圆心和半径分别为 ()

- A. $(1, 3), 2$ B. $(-1, 3), 4$ C. $(1, -3), 2$ D. $(1, -3), 4$

3. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为棱 CC_1 的中点, 若 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$, 则 $\overrightarrow{AM}$ 等于 ()

- A. $\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ B. $\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$
C. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ D. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$



4. 若过点 $P(-1, 0)$ 的直线与以 $A(1, 2), B(-2, \sqrt{3})$ 为端点的线段相交, 则直线的倾斜角取值范围为 ()

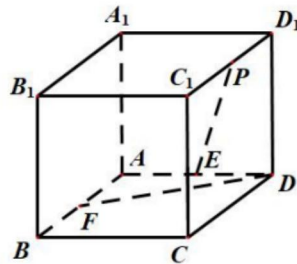
- A. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ B. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$ C. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ D. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right]$

5. 已知直线 $l_1: a^2x - y + a^2 - 3a = 0$, $l_2: (4a - 3)x - y - 2 = 0$, 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 $a =$ ()

- A. 1 B. -1 或 -3 C. 1 或 3 D. 3

6. 已知在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别为 AD, AB 的中点, 点 P 在 C_1D_1 上运动, 若异面直线 EP, DF 所成的角为 α , 则 $\cos \alpha$ 的最大值为 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$



7. 已知点 $A(-4,1)$ 在直线 $l: (2m+1)x - (m-1)y - m - 5 = 0 (m \in R)$ 上的射影为点 B ，则点 B 到点 $P(3,-1)$ 距离的最大值为 () .

A. $5 - \sqrt{10}$

B. 5

C. $5 + \sqrt{10}$

D. $5 + 2\sqrt{10}$

8. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 和点 $P(-\frac{1}{2}, 0)$ ，点 $B(2,1)$ ， M 为圆 O 上的动点，则 $2|MP| + |MB|$ 的最小值为 ()

A. $\sqrt{15}$

B. $1 + \sqrt{10}$

C. $\sqrt{17}$

D. $3 + \sqrt{2}$

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错得或不选的得 0 分.

9. 已知直线 $l: (m+2)x - y + m - 2 = 0$ ，下列说法正确的是 ()

A. 若 $m = -3$ ，则直线 l 的倾斜角为 135°

B. 若直线 l 在两坐标轴上的截距相等，则 $m = -3$

C. $\exists m \in R$ ，原点 $(0,0)$ 到直线 l 的距离为 5

D. 直线 l 与直线 $x + y = 0$ 垂直，则 $m = -1$

10. 如图，正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，正方形 $ABCD$ 的中心为 O ，

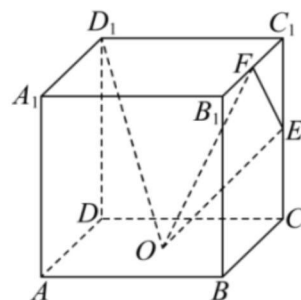
棱 CC_1, B_1C_1 的中点分别为 E, F 则 ()

A. $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}$

B. 点 F 到直线 OD_1 的距离为 $\frac{\sqrt{14}}{4}$

C. $S_{\triangle FOE} = \frac{\sqrt{6}}{8}$

D. 异面直线 OD_1 与 EF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{33}}{6}$



11. 已知曲线 E 的方程为 $x^2 + y^2 = |x| + |y|$ ，则 ()

A. 曲线 E 关于直线 $y=x$ 对称

B. 曲线 E 围成的图形面积为 $\pi + 2$

C. 若点 (x_0, y_0) 在曲线 E 上，则 $-\frac{1+\sqrt{2}}{2} \leq x_0 \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$

D. 若圆 $x^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 能覆盖曲线 E ，则 r 的最小值为 $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

12. 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = AA_1 = 1$, 点 P 满足 $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC} + \mu \overrightarrow{BB_1}$, 其中 $\lambda \in [0, 1], \mu \in [0, 1]$, 则 ()

- A. 当 $\lambda = 1$ 时, $\triangle AB_1P$ 的周长为定值
- B. 当 $\mu = 1$ 时, 三棱锥 $P - A_1BC$ 的体积为定值
- C. 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 有两个点 P , 使得 $A_1P \perp BP$
- D. 当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时, 有两个点 P , 使得 $A_1B \perp$ 平面 AB_1P

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知向量 $\vec{a} = (1, 1, \sqrt{2}), \vec{b} = (-3, 2, 0)$, 则 $\vec{a} + \vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影向量为 _____. (用坐标表示)

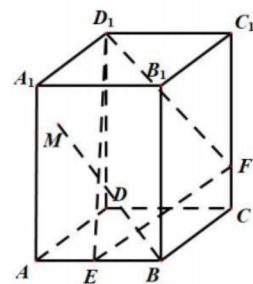
14. 已知直线 $l_1: x - 2y - 2 = 0$ 的倾斜角为 θ , 直线 l_2 的倾斜角为 2θ , 且直线 l_2 在 y 轴上的截距为 -3 , 则直线 l_2 的一般式方程为 _____.

15. 以三角形边 BC, CA, AB 为边向形外作正三角形 BCA', CAB', ABC' , 则 AA', BB', CC' 三线共点, 该点称为 $\triangle ABC$ 的正等角中心. 当 $\triangle ABC$ 的每个内角都小于 120° 时, 正等角中心点 P 满足以下性质: (1) $\angle APB = \angle APC = \angle BPC = 120^\circ$;

(2) 正等角中心是到该三角形三个顶点距离之和最小的点 (也即费马点).

由以上性质得 $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$ 的最小值为 _____.

16. 正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2, AA_1 = 4$, E 为 AB 的中点, 点 F 满足 $\overrightarrow{C_1F} = 3\overrightarrow{FC}$, 动点 M 在侧面 AA_1D_1D 内运动, 且 $MB \parallel$ 平面 D_1EF , 则 $|MD|$ 的取值范围是 _____.

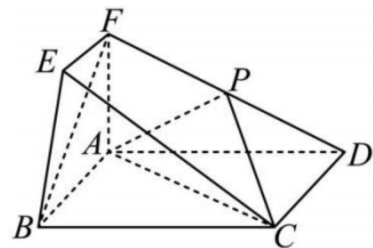


四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10) 已知三角形的三个顶点分别为 $A(0, 1), B(-2, 0), C(2, 0)$, 求:

- (1) AC 边上的高所在的直线方程;
- (2) AB 边的中线所在的直线方程.

18. (本小题满分 12 分) 在如图所示的几何体中, 四边形 $ABCD$ 为矩形, $AF \perp$ 平面 $ABCD$, $EF \parallel AB$, $AD = 2$, $AB = AF = 2EF = 1$, 点 P 为棱 DF 的中点.



(1) 求证: $BF \parallel$ 平面 APC ;

(2) 求直线 DE 与平面 BCF 所成角的正弦值.

19. (本小题满分 12 分) 设直线 l 的方程为 $(a+1)x + y - 5 - 2a = 0 (a \in \mathbb{R})$

(1) 求证: 不论 a 为何值, 直线 l 必过一定点 P ;

(2) 若直线 l 分别与 x 轴正半轴, y 轴正半轴交于点 $A(x_A, 0), B(0, y_B)$, 当 $\triangle AOB$ 面积为 12 时, 求 $\triangle AOB$ 的周长.

20. (本小题满分 12 分) 已知圆 C 过点 $A(4, 0), B(0, 4)$, 且圆心 C 在直线 $l: x + y - 6 = 0$ 上.

(1) 求圆 C 的方程;

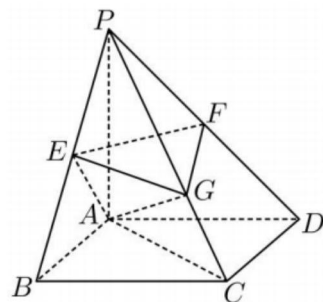
(2) 若从点 $M(4, 1)$ 发出的光线经过直线 $y = x + 1$ 反射, 反射光线 l_1 恰好平分圆 C 的圆周, 求反射光线 l_1 所在直线的方程.

21. (本小题满分 12 分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形, $AD = AP = 2$, $PA \perp$ 底面 $ABCD$,

E, F 分别是线段 PB, PD 的中点, G 是线段 PC 上的一点.

(1) 求证: 平面 $EFG \perp$ 平面 PAC ;

(2) 若直线 AG 与平面 AEF 所成角的正弦值为 $\frac{1}{3}$, 且 G 点不是线段 PC 的中点, 求三棱锥 $E-ABG$ 体积.



22. (本小题满分 12 分) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 底面是边长为 2 的等边三角形,

$CC_1 = 2, D, E$ 分别是线段 AC, CC_1 的中点, C_1 在平面 ABC 内的射影为 D .

(1) 求证: $A_1C \perp$ 平面 BDE ;

(2) 若点 F 为线段 B_1C_1 上的动点 (不包括端点), 求锐二面角 $F-BD-E$ 的余弦值的取值范围.

