长郡中学 2023 年上学期高二期末考试

数　学

时量:120 分钟　　满分:150 分

得分＿＿＿＿＿＿

学号＿＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿＿　班级＿＿＿＿＿＿　学校＿＿＿＿＿＿

密封线内不要答题

第Ⅰ卷

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集 $U=\{0,1,2,4,6,8\}$,集合 $M=\{0,4,6\}$,$N=\{0,1,6\}$,则 $M\cap(\complement_U N)=$

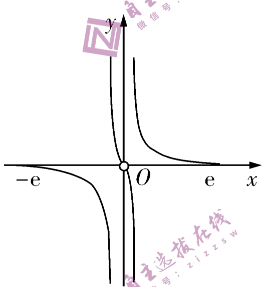
A. $\{0,6\}$　　B. $\{0,2,4,6,8\}$　　C. $\{0,1,4,6\}$　　D. $\{4\}$

2. 设 m,n 是两条不同的直线,α,β 是两个不同的平面,则

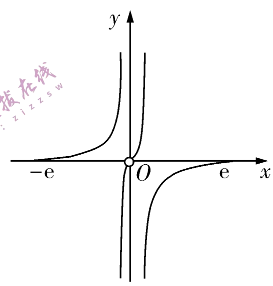
A. 若 $m\perp n,n/\!/\alpha$,则 $m\perp\alpha$　　B. 若 $m/\!/\beta,\beta\perp\alpha$,则 $m\perp\alpha$

C. 若 $m\perp\beta,n\perp\beta,n\perp\alpha$,则 $m\perp\alpha$　　D. 若 $m\perp n,n\perp\beta,\beta\perp\alpha$,则 $m\perp\alpha$

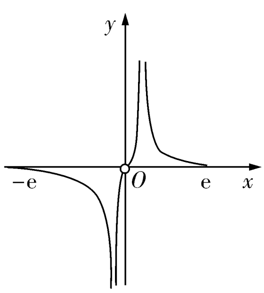
3. 函数 $y=\dfrac{2-\ln x^2}{2+\ln x^2}\sin x,x\in[-\mathrm{e},\mathrm{e}]$的图象大致为



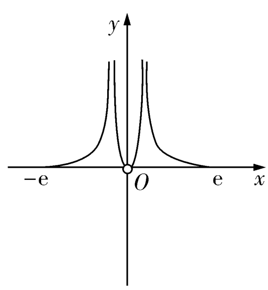
A



B



C



D

4. 根据分类变量 x 与 y 的成对样本数据,计算得到 $\chi^2=6.147$,依据 $\alpha=0.01$ 的独立性检验($x_{0.01}=6.635$),结论为

A. 变量 x 与 y 不独立

B. 变量 x 与 y 不独立,这个结论犯错误的概率不超过 0.01

C. 变量 x 与 y 独立

D. 变量 x 与 y 独立,这个结论犯错误的概率不超过 0.01

5. 若“$\frac{x-1}{x-3}<0$”是“$|x-a|<2$”的充分而不必要条件，则实数 a 的取值范围是

A. $(1,3]$　　B. $[1,3]$　　C. $(-1,3]$　　D. $[-1,3]$

6. 在$\triangle ABC$中，已知$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$，点 G 满足$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$，则向量$\overrightarrow{BG}$在向量$\overrightarrow{BA}$方向上的投影向量为

A. $\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$　　B. $\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$　　C. $2\overrightarrow{BA}$　　D. $3\overrightarrow{BA}$

7. 若 $\alpha,\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，且$(1-\cos 2\alpha)(1+\sin\beta)=\sin 2\alpha\cos\beta$，则下列结论正确的是

A. $2\alpha+\beta=\frac{5\pi}{2}$　　B. $2\alpha-\beta=\frac{3\pi}{4}$

C. $\alpha+\beta=\frac{7\pi}{4}$　　D. $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$

8. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_n\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}=-\frac{1}{2}$，$a_1=-2$，$a_2=\frac{1}{4}$，则$\{a_n\}$的前 n 项积的最大值为

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 4

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知角 α 的终边经过点$(-1,2)$，则下列结论正确的是

A. $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-7\cos\alpha}=-\frac{1}{9}$

B. $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

C. $\tan(\pi-2\alpha)=\frac{4}{3}$

D. 若 α 为钝角，则$\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{2\pi}{3}$

10. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，且对任意的 $m,n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{m+n}=a_m+a_n+1$，则下列选项正确的是

A. $a_{n+1}-a_n$ 的值随 n 的变化而变化

B. $a_{16}+a_{2008}=a_1+a_{2023}$

C. 若 $m,n,p\in\mathbf{N}^*$，$m+n=2p$，则 $a_m+a_n=a_{2p}$

D. $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为递增数列

11. 设正实数 x,y 满足 $2x+y=1$，则

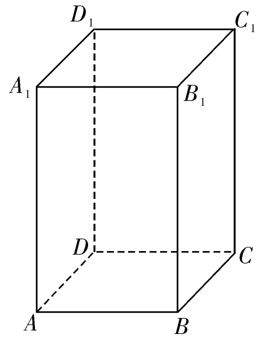
A. xy 的最大值是$\frac{1}{4}$

B. $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$的最小值是 9

C. $4x^2+y^2$ 的最小值为$\frac{1}{2}$

D. $\sqrt{2x}+\sqrt{y}$的最大值为$\sqrt{2}$

12. 如图，正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB=2$，动点 P 满足$\overrightarrow{AP}=a\overrightarrow{AC}+b\overrightarrow{AA_1}$，且 $a,b\in(0,1)$. 则下列说法正确的是



A. 当 $a=\frac{1}{2}$时，直线 $AC\perp$平面 BPB_1

B. 当 $a+b=1$ 时，$PB+PB_1$ 的最小值为$\sqrt{6}$

C. 若直线 BP 与 BD 所成角为$\frac{\pi}{4}$，则动点 P 的轨迹长度为 π

D. 当 $a+2b=1$ 时，三棱锥 $P-ABC$ 外接球半径的取值范围是$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

第Ⅱ卷

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知复数 $z=\frac{5i}{2+i}$，则$|z|=$______.

14. 为了衡量星星的明暗程度，古希腊天文学家喜帕恰斯在公元前二世纪首先提出了星等这个概念. 星等的数值越小，星星就越亮；星等的数值越大，星星就越暗. 到了 1850 年，由于光度计在天体光度测量的应用，英国天文学家普森又提出了亮度的概念，天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满足 $m_1-m_2=2.5(\lg E_2-\lg E_1)$，其中星等为 m_k 的星的亮度为 $E_k(k=1,2)$. 已知"心宿二"的星等是 1.00，"天津四"的星等是 1.25，则"心宿二"的亮度大约是"天津四"的________倍.（结果精确到 0.01，当$|x|$较小时，$10^x\approx1+2.3x+2.7x^2$）

15. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，$PA=PB=2$，$PC=\sqrt{6}$，则该棱锥的体积为__________.

16. 在$\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别 a,b,c，$B=\frac{\pi}{3}$，$b=2\sqrt{3}$，若$\triangle ABC$ 有且仅有一个解，则 $a-c$ 的取值范围是__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

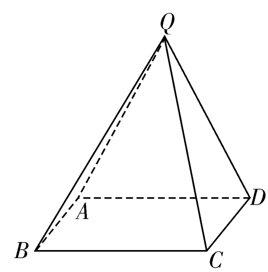
设函数 $f(x)=x^3-3ax^2+b$.

(1)若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处与直线 $y=8$ 相切，求 a,b 的值；

(2)讨论函数 $y=f(x)$ 的单调性.

18.（本小题满分 12 分）

在四棱锥 $Q-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，若 $AD=2$，$QD=QA=\sqrt{5}$，$QC=3$.



(1)求证：平面 $QAD\perp$ 平面 $ABCD$；

(2)求二面角 $B-QD-A$ 的平面角的余弦值.

19.（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=4\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)\sin \omega x-\cos 2\omega x+1$，其中 $0<\omega<2$.

(1)若 $x=\frac{\pi}{4}$是函数 $f(x)$的一条对称轴，求函数周期 T；

(2)若函数 $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上为增函数，求 ω 的最大值.

20.(本小题满分 12 分)

已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$S_9=90$,$a_{10}=20$,数列$\{b_n\}$满足 $b_1=a_1$,$nb_{n+1}=a_nb_n$.

(1)求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

(2)设数列$\{c_n\}$满足:$c_1=4$,$c_{n+1}=c_n-\dfrac{a_n}{b_n}(n\in\mathbf{N}^*)$,若不等式 $\lambda+\dfrac{3n+9}{2^n}\geqslant c_n(n\in\mathbf{N}^*)$恒成立,求实数 λ 的取值范围.

21.(本小题满分 12 分)

人工智能是研究用于模拟和延伸人类智能的技术科学,被认为是 21 世纪最重要的尖端科技之一,其理论和技术正在日益成熟,应用领域也在不断扩大.人工智能背后的一个基本原理:首先确定先验概率,然后通过计算得到后验概率,使先验概率得到修正和校对,再根据后验概率做出推理和决策.基于这一基本原理,我们可以设计如下试验模型:有完全相同的甲、乙两个袋子,袋子中有形状和大小完全相同的小球,其中甲袋中有 9 个红球和 1 个白球,乙袋中有 2 个红球和 8 个白球.从这两个袋子中选择一个袋子,再从该袋子中等可能摸出一个球,称为一次试验.若多次试验直到摸出红球,则试验结束.假设首次试验选到甲袋或乙袋的概率均为$\frac{1}{2}$(先验概率).

(1)求首次试验结束的概率;

(2)在首次试验摸出白球的条件下,我们对选到甲袋或乙袋的概率(先验概率)进行调整.

①求选到的袋子为甲袋的概率;

②将首次试验摸出的白球放回原来袋子,继续进行第二次试验时有如下两种方案:方案一,从原来袋子中摸球;方案二,从另外一个袋子中摸球.请通过计算,说明选择哪个方案第二次试验结束的概率更大.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{m}{x}+\ln\frac{x}{a}(m\in\mathbf{R},a>0)$.

(1)若 $f(x)$ 的最小值为 2，求 $\frac{m}{a}$ 的值；

(2)若 $m=1$，$a>\mathrm{e}$，实数 x_0 为函数 $f(x)$ 大于 1 的零点，求证：

①$\frac{1}{2x_0}+x_0<a-1$；

②$x_0+\frac{1}{x_0}>2\ln a-\ln(\ln a)$.