

2023 届高三五月联合测评

数学试卷参考答案与评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	C	B	D	C	C	B	ACD	ACD	ABD	BD

一、单选题：

1. D 【解析】
$$\begin{cases} 1-x > 0 \\ \log_2(1-x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-x > 0, \\ 1-x \geq 1 \end{cases}, \therefore x \leq 0, \text{定义域为 } (-\infty, 0], \text{ 故选 D.}$$

2. A 【解析】由 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$, 得 C 点对应的复数为 $-5+3i$, 由 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ 得 B 点对应复数为 $(3+5i)+(-5+3i)=-2+8i$, 故选 A.

3. C 【解析】设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$
 $\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \vec{a} \cdot \left(\frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}\right) = \frac{\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}}{3} = \frac{4 + 2 \times 2 \times 2 \times \cos 60^\circ}{3} = \frac{8}{3}$, 故选 C.

(建系用坐标运算也是较好选择)

4. B 【解析】 A, B, C, D, E, F 表示六个进站口, 李明若先到 A 进站口, 不超过 200 米的进站口有 B 和 C , 此时符合条件的概率为 $\frac{1}{6} \times \frac{2}{5}$, 同理先到 B, C, D, E, F 的符合条件的概率分别为 $\frac{1}{6} \times \frac{3}{5}, \frac{1}{6} \times \frac{4}{5}$,

$\frac{1}{6} \times \frac{4}{5}, \frac{1}{6} \times \frac{3}{5}, \frac{1}{6} \times \frac{2}{5}$, 故所求概率为 $\frac{1}{6} \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right) = \frac{3}{5}$, 故选 B.

5. D 【解析】 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} \cos \omega x - \frac{1}{2} = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$, 由已知条件 $x = \frac{4\pi}{3}$ 时 $f(x)$ 取得最大

值, 有 $\frac{4\pi}{3}\omega - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 即 $\frac{4}{3}\omega = 2k + \frac{2}{3}$. 又由已知得 $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} > \frac{4\pi}{3}$, 于是 $0 < \omega < \frac{3}{4}$, 由于 $k \in \mathbf{Z}$, 故

$k=0, \omega = \frac{1}{2}$. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$ 在 $\left(\frac{17\pi}{3}, a\right)$ 上单调, 故 $a_{\max} = \frac{10\pi}{3} + 4\pi = \frac{22\pi}{3}$. 故选 D.

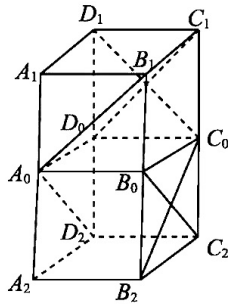
6. C 【解析】7 点 30 分开始过 x 分钟累计到校人数为 $59x + \frac{x(x-1)}{2} \times (-2) = -x^2 + 60x$

设人工检测 $(x-4)$ 分钟时, 不再出现排队, 则有 $40x + 12(x-4) \geq -x^2 + 60x$

即 $x^2 - 8x - 48 \geq 0$, 解得 $x \geq 12$, 而且 12 分钟时到校人数 $59 - 11 \times 2 = 47 < 52$

\therefore 人工检测 8 分钟后不再出现排队等候的情况, 故选 C.

7. C 【解析】如图, 把两个单位正方体叠放在一起(构建模型), 平面 $A_0B_0C_2D_2$,



平面 $A_0B_0C_0D_0$, 平面 $A_0B_1C_1D_0$ 分别代表第一, 二, 三个平面, 平面 $A_0B_0C_2D_2$

的法向量为 $\overrightarrow{C_0B_2}$, 平面 $A_0B_1C_1D_0$ 的法向量为 $\overrightarrow{C_0D_1}$, $\overrightarrow{C_0B_2}$ 与 $\overrightarrow{C_0D_1}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$,

故所求锐二面角的大小的余弦值是 $\frac{1}{2}$, 故选 C.

8. B 【解析】由两个分段函数在各自区间上单调, 存在关于 y 轴对称的两点分别位于

两个函数图象上. 设 $P(x_0, y_0)$ 在 $y = \ln \frac{x}{a} (x > 1)$ 的图象上, 则 $P'(-x_0, y_0)$ 在函数

$y = ae^{-x}$ 的图象上, 故有

$$ae^{x_0} = \ln \frac{x_0}{a} (x_0 > 1), \text{ 即 } e^{x_0 + \ln a} + \ln a = \ln x_0, \text{ 进而 } e^{x_0 + \ln a} + \ln a + x_0 = x_0 + \ln x_0 = e^{\ln x_0} + \ln x_0.$$

设 $\varphi(x) = e^x + x$, 则 $\varphi(\ln a + x_0) = \varphi(\ln x_0)$, 由 $\varphi(x)$ 得单调性得

$$\ln a + x_0 = \ln x_0, \text{ 即 } \ln a = \ln x_0 - x_0$$

令 $h(x) = \ln x - x, x \in (1, +\infty), h'(x) = \frac{1-x}{x} < 0$, 知 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减

故 $h(x) < -1, \ln a < -1$, 于是 $0 < a < \frac{1}{e}$. 选 B.

二、多选题:

9. ACD 【解析】对于 A, 由 A, B 是互斥事件, 故 $P(A+B) = P(A) + P(B) = 0.5 + 0.3 = 0.8$,

$\therefore A$ 正确.

对于 B, 由 $(C_V A) \cup (C_V B) = C_V (A \cap B)$ 知 $P(\bar{A} + \bar{B}) = 1 - P(AB) = 1 - 0 = 1$

$\therefore B$ 不正确.

对于 C, 由于 A, B 是相互独立事件, $P(AB) = P(A)P(B)$

$$\therefore P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.5 + 0.3 - 0.5 \times 0.3 = 0.65. \therefore C \text{ 正确.}$$

对于 D, $\therefore P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = 0.5, \therefore P(AB) = 0.25$,

$$\therefore P(B|\bar{A}) = \frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)} = \frac{0.3 - 0.25}{1 - 0.5} = 0.1, \therefore D \text{ 正确.}$$

10. ACD 【解析】函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴和直线 $x=1$ 对称, 因此 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数.

对于 A, 由函数 $f(x)$ 和二次函数的对称轴重合, 解析式正确.

对于 B, 在同一坐标系中画出函数 $f(x)$ 与 $y=e^{-x}+1$ 的图象, 两图象交于 $A(x_1, y_1)$,

$B(x_2, y_2)$, 点 A 关于直线 $x=1$ 的对称点为 $A'(x'_1, y'_1)$, $x_1+x'_1=2, x_2>x'_1, \therefore x_1+x_2>2$,

\therefore B 不正确.

对于 C, 函数 $f(x)$ 在 $[4, 5]$ 上单调递增, $[5, 6]$ 上单调递减, 在 $x=4$ 或 $x=6$ 时有最小值,

而分母中的函数 $y=2^x$ 在 $[4, 6]$ 上单调递增,

$\therefore x=6$ 时, $\frac{f(x)}{2^x}$ 在 $[4, 6]$ 上的最小值是 $\frac{1}{64}$,

\therefore C 正确.

对于 D. $f(\log_4 \frac{5}{16}) = f(\log_4 5 - 2) = f(\log_4 5)$

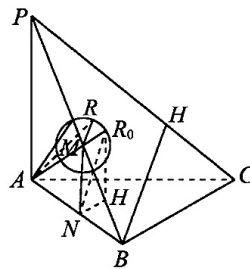
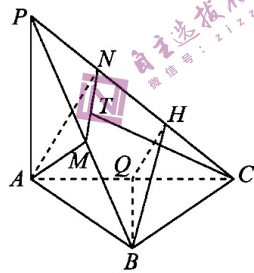
$$\log_3 4 - \log_4 5 = \frac{\lg 4}{\lg 3} - \frac{\lg 5}{\lg 4} = \frac{\lg^2 4 - \lg 3 \cdot \lg 5}{\lg 3 \cdot \lg 4} > \frac{\lg^2 4 - (\frac{\lg 3 + \lg 5}{2})^2}{\lg 3 \cdot \lg 4} = \frac{\lg^2 4 - (\lg \sqrt{15})^2}{\lg 3 \cdot \lg 4} > 0$$

$\therefore 2 > \log_3 4 > \log_4 5 > 1$, 又函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减, $\therefore f(\log_4 5) > f(\log_3 4)$

$\therefore f(\log_3 4) < f(\log_4 \frac{5}{16}) \therefore$ D 正确.

11. ABD 【解析】易知三棱锥 $P-ABC$ 是“基本图”, 它各个面均为直角三角形, 且 $BC \perp$ 平面 PAB , 平面

$PAB \perp$ 平面 ABC , 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC , $BQ \perp AC$, $BQ \perp$ 平面 PAC



对于 A, 由 $BQ \perp$ 平面 PAC 知, $PC \perp BQ$, 又由已知 $QH \perp PC$ 得到 $PC \perp$ 平面 BQH , 又 $PC \subset$ 平面 PBC ,

\therefore 平面 BQH 垂直于平面 PBC , 故 A 正确.

对于 B, 过点 C 作 $CT \perp MN$, 由于平面 $AMN \perp$ 平面 PBC , 且两面的交线为 MN ,

由面面垂直的性质得 $CT \perp$ 平面 AMN , $\therefore CT \perp AM$, 又 $BC \perp$ 平面 PAB , $\therefore BC \perp AM$,

$\therefore AM \perp$ 平面 PAB , $\therefore AM \perp PB$, B 对.

对于 C, 在条件下, N 可以在直线 PC 上运动, \therefore C 不正确.

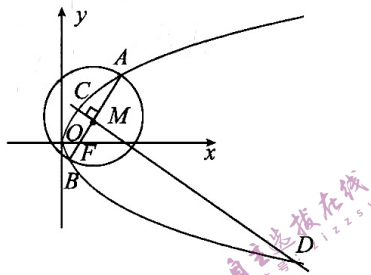
对于 D, R 点的轨迹是以 M 为圆心 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 为半径的半圆, 动线段 AR 是半圆锥的母线,

AR 与平面 PBC 所成的角为定角, AR 与 BC 所成的角最小时 $MR_0 // BC$.

过 R_0 作 $R_0H \perp$ 平面 ABC, $HN \perp AB$, 垂足为 N, 则 R_0N 为 R_0 到直线 AB 的距离.

由四边形 R_0MNH 是矩形得 $R_0N = \sqrt{\frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$, \therefore D 正确.

12. BD 【解析】分别过 A, B, M 作抛物线准线的垂线, 垂足分别为 A_1, B_1, M_1



由于直线 AB 过焦点 F, M 到准线的距离 $|MM_1| = \frac{|AA_1| + |BB_1|}{2} = \frac{|AF| + |BF|}{2} = \frac{|AB|}{2}$, 故以

AB 为直径的圆与抛物线的准线相切, 故 B 正确.

由于以 AB 为直径的圆与抛物线的准线相切, 有 $6 + \frac{p}{2} = 8$, $\therefore p = 4$, 故 A 不正确.

\because AB 过焦点 $F(2, 0)$, $\therefore k_{AB} = 1$. \therefore 直线 AB 的方程是 $y = x - 2$, 假设抛物线上存在两点 T, T' 关于直线 AB 对称, 且 y 设直线 TT' 的方程是: $y = -x + m$, 代入 $y^2 = 8x$ 中, 得 $y^2 + 8y - 8m = 0$, 由韦达定理可得 TT' 的中点为 $N(m+4, -4)$, 又 N 在直线 AB 上, $\therefore -4 = m + 4 - 2$, $\therefore m = -6$, 但是 $y^2 + 8y + 48 = 0$ 的 $\Delta < 0$, 直线 TT' 不存在.

\therefore C 不正确.

对于 D, 直线 CD 的方程为: $y = -x + 10$, 代入 $y^2 = 8x$, 得 $x^2 - 28x + 100 = 0$

由韦达定理得, $x_C + x_D = 28$, $x_C x_D = 100$.

$$|MC| \cdot |MD| = \sqrt{2}(6 - x_C) \cdot \sqrt{2}(x_D - 6) = -2[x_C x_D - 6(x_C + x_D) + 36] = 64$$

$$|MA| \cdot |MB| = 8 \times 8 = 64, \therefore |MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$$

故 D 正确.

三. 填空题:

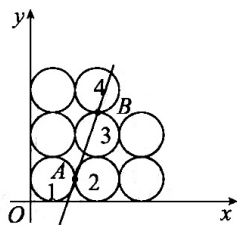
13. 11 【解析】展开式中一次项系数为 $1 + C_5^2 = 11$, 故填 11.

14. $\frac{2}{5}$ 【解析】由简单随机抽样的特点知概率为 $\frac{2}{5}$.

或甲乙两人摸球的等可能结果有 A_5^2 , 其中丙摸出红球的事件占有 $2A_4^2$ 个结果

$$\text{故丙摸出红球的概率} = \frac{2A_4^2}{A_5^2} = \frac{2}{5}.$$

15. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 【解析】过 $A(2,1)$ 的直线将圆 1 与圆 2 平分, 过 $B(3,4)$ 的直线将圆 1 与圆 2 平分, 且

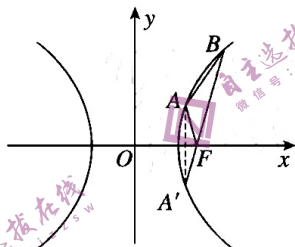


$k_{AB}=3$, 故直线 AB 的方程为: $y-1=3(x-2)$, 即 $y=3x-5$, 故原点 O 到直线

$$AB \text{ 的距离为 } d = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

16. $\frac{4}{3}$ 【解析】延长 BF 交双曲线右支于 A' , 由已知 A' 与 A 关于 x 轴对称, 设 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$,

$$A'(x_A, -y_A), \text{ 则 } |FA| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \cdot |y_A|, |FB| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} |y_B|,$$



$$\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} |FA| \cdot |FB| \cdot \sin(\pi - 2\alpha) \text{ (其中 } \angle BFX = \alpha)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^2 |y_A y_B| \cdot \sin 2\alpha$$

$$\because \tan \alpha = 2,$$

$$\therefore \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{4}{5}$$

把 $y=2(x-2)$ 代入 $x^2 - y^2 = 2$ 中得 $\frac{3}{4}y^2 - 2y - 2 = 0$

$$\text{由韦达定理得 } y_B \cdot y_{A'} = \frac{-8}{3}$$

$$\therefore |y_A y_B| = |y_{A'} y_B| = \frac{8}{3}$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{8}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{3}.$$

四. 解答题

17. 【解析】(1) 证明: $\because a_n \cdot a_{n+1} = 2^{9-2n}$ ①

$$\therefore n \geq 2 \text{ 时, } a_{n-1} \cdot a_n = 2^{7-2(n-1)} = 2^{9-2n} \quad \text{②}$$

①得 $n \geq 2$ 时, $\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} = \frac{1}{4}$ 5分

(2) 假设存在正数 λ 使得数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 由 $a_1 a_2 = 32$ 得 $a_2 = \frac{32}{\lambda}$,

由 $a_2 a_3 = 8$, 得 $a_3 = \frac{\lambda}{4}$, 因为 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$, 即 $(\frac{32}{\lambda})^2 = \lambda \cdot \frac{\lambda}{4}$, $\lambda^2 = 64$,

$\therefore \lambda > 0$, $\therefore \lambda = 8$ 7分

下证: $\lambda = 8$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列:

由(1)知数列 $\{a_{2n-1}\}$ 和 $\{a_{2n}\}$ 均为公比 $\frac{1}{4}$ 的等比数列.

$$\therefore a_{2n-1} = 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 2^{4-(2n-1)}, a_{2n} = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 2^{4-2n}$$

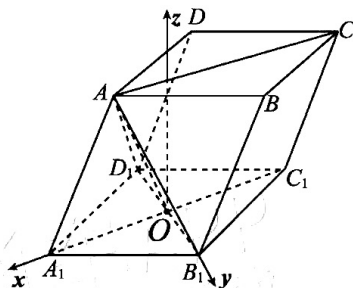
$\therefore n$ 为奇数时, $a_n = 2^{4-n}$, n 为偶数时, $a_n = 2^{4-n}$

\therefore 对一切正整数 n , 都有 $a_n = 2^{4-n}$, 9分

$$\therefore n \geq 2, \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{2},$$

\therefore 存在正数 $\lambda = 8$, 使得数列 $\{a_n\}$ 是等比数列. 10分

18. (1) 连结 AC 和 $D_1 B_1$, AD_1 , AB_1 , $D_1 B_1 \cap A_1 C_1 = O$, 由底面是菱形得, $D_1 B_1 \perp A_1 C_1$;



由 $\triangle AA_1 D_1$ 与 $\triangle AA_1 B_1$ 全等, 得 $AD_1 = AB_1$, $\therefore O$ 为 $D_1 B_1$ 的中点, $\therefore D_1 B_1 \perp AO$

又 $\because AO \cap A_1 C_1 = O$, $\therefore D_1 B_1 \perp$ 平面 $AA_1 C_1 C$, 5分

又 $\because D_1 B_1 \subset$ 平面 $A_1 B_1 C_1 D_1$, \therefore 平面 $AA_1 C_1 C \perp$ 平面 $A_1 B_1 C_1 D_1$ 6分

(2) 以 OA_1 为 X 轴, 以 OB_1 为 Y 轴, 以过 O 与底面垂直的直线为 Z 轴, 建立如图空间坐标

系,则 $A_1(\sqrt{3}, 0, 0), B_1(0, 1, 0), C_1(-\sqrt{3}, 0, 0), D_1(0, -1, 0)$ 7分

过 A 作底面的垂线,垂足为 H ,由 $A-A_1B_1D_1$ 为正三棱锥知 H 为 $\triangle A_1B_1D_1$ 的重心

$$\therefore A_1H = \frac{2\sqrt{3}}{3}, AH = \sqrt{AA_1^2 - A_1H^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}, \therefore A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$$

设 $D(x_D, y_D, z_D)$,由 $\overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{D_1D}$,得 $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{2\sqrt{6}}{3}) = (x_D, y_D + 1, z_D)$

$$\therefore D\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -1, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right),$$

$$\therefore \overrightarrow{B_1D} = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -2, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \dots\dots\dots 9分$$

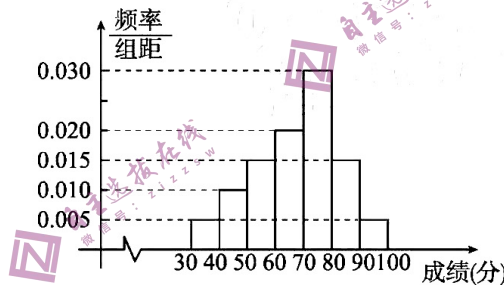
又取平面 AA_1C_1C 的法向量为 $\overrightarrow{B_1D_1} = (0, -2, 0)$

设直线 B_1D 与平面 A_1C_1CA 所成角为 α ,

$$\text{则 } \sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{B_1D} \cdot \overrightarrow{B_1D_1}|}{|\overrightarrow{B_1D}| \cdot |\overrightarrow{B_1D_1}|} = \frac{4}{\sqrt{\frac{4}{3} + 4 + \frac{8}{3}} \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

\therefore 直线 B_1D 与平面 A_1C_1CA 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 12分

19. (1) 补全频率分布直方图,如图. 2分



百分之八十五分位数是 83.3 4分

(2) X 服从 $B(2, 0.2), Y$ 服从 $B(2, 0.5), E(X) = 2 \times 0.2 = 0.4, E(Y) = 2 \times 0.5 = 1$

$$\therefore E(Y) - E(X) = 1 - 0.4 = 0.6 \dots\dots\dots 6分$$

随机变量 $Z = Y - X$ 可取 0, 1, 2

$$\begin{aligned} P(Z=0) &= P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=2) \\ &= (1-0.5)^2 + C_2^1 0.5 \times 0.2 + 0.2^2 = 0.49; \dots\dots\dots 8分 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Z=1) &= P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=2) = C_2^1 (1-0.5) \times (0.5-0.2) \\ &+ C_2^1 0.2 \times (0.5-0.2) = 0.42 \dots\dots\dots 10分 \end{aligned}$$

$$P(Z=2) = P(X=0, Y=2) = (0.5-0.2)^2 = 0.09 \dots\dots\dots 11分$$

$\therefore E(Z) = 0 \times 0.49 + 1 \times 0.42 + 2 \times 0.09 = 0.6$

$\therefore E(Z) = E(Y) - E(X) \dots\dots\dots 12$ 分

20. (1) 设 $\angle CAO = \angle BAO = \angle OAB = \angle BCO = \alpha$,

在 $\triangle BOC$ 和 $\triangle AOB$ 中, 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin \angle BOC} = \frac{OB}{\sin \alpha} = \frac{OA}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \angle AOB}$

又 $\because \sin \angle BOC = \sin(\pi - \angle B) = \sin B, \sin \angle AOB = \sin(\pi - A) = \sin A$

$\therefore \frac{a}{\sin \angle BOC} = \frac{a}{\sin B} = \frac{c}{\sin \angle AOB} = \frac{c}{\sin A}, \therefore \frac{a}{c} = \frac{\sin B}{\sin A},$ 又 $\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a}$

$\therefore \frac{a}{c} = \frac{b}{a}$, 即 $a^2 = bc$. $\dots\dots\dots 6$ 分

(2) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = cb \cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2} = \frac{c^2 + b^2 - bc}{2} = \frac{(c+b)^2 - 3bc}{2} = \frac{(4-a)^2 - 3a^2}{2}$
 $= \frac{-2a^2 - 8a + 16}{2} = -a^2 - 4a + 8 \dots\dots\dots 9$ 分

又 $\because c, a, b$ 成等比数列, 可设 $b = \frac{a}{q}, c = aq$ (公比 $q \geq 1$) ($b \leq a \leq c$)

$\therefore \begin{cases} q \geq 1 \\ a + \frac{a}{q} > aq \end{cases}$, 解得: $1 \leq q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

又由 $a + \frac{a}{q} + aq = 4$, 得 $a = \frac{4}{q + \frac{1}{q} + 1} \in \left(\sqrt{5} - 1, \frac{4}{3} \right]$

$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -(a+2)^2 + 12 \in \left[\frac{8}{9}, 6 - 2\sqrt{5} \right) \dots\dots\dots 12$ 分

21. (1) 由 $|AF_1| + |AF_2| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = 2a$, 得 $a = \sqrt{2}$,

$\because c = 1, \therefore b = 1$

\therefore 椭圆 C 的方程是 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$; $\dots\dots\dots 4$ 分

(2) 设 $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$, 由题意知 $x_0, y_0 > 0, y_1, y_2 < 0$

$S_{\triangle M_2NF_2} - S_{\triangle M_1NF_1} = S_{\triangle M_2F_1F_2} - S_{\triangle M_1F_1F_2} = \frac{1}{2} \times 2(|y_2| - |y_1|) = y_1 - y_2 \dots\dots\dots 6$ 分

把 $QF_1: x = \frac{x_0 + 1}{y_0}y - 1$, 代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 中, 整理得

$[(x_0 + 1)^2 + 2y_0^2]y^2 - 2(x_0 + 1)y_0y - y_0^2 = 0$, 又 $x_0^2 + 2y_0^2 = 2$

$\therefore (3 + 2x_0)y^2 - 2(x_0 + 1)y_0y - y_0^2 = 0$.

$$\therefore y_0 y_1 = -\frac{y_0^2}{3+2x_0}, \therefore y_1 = -\frac{y_0}{3+2x_0}$$

同理可得, $y_2 = -\frac{y_0}{3-2x_0}$ 8分

$$\therefore y_1 - y_2 = \frac{y_0}{3-2x_0} - \frac{y_0}{3+2x_0} = \frac{4x_0 y_0}{9-4x_0^2} = \frac{4x_0 y_0}{9(\frac{x_0^2}{2} + y_0^2) - 4x_0^2} = \frac{4x_0 y_0}{\frac{x_0^2}{2} + 9y_0^2}$$

$$\leq \frac{4x_0 y_0}{2\sqrt{\frac{x_0^2}{2} \cdot 9y_0^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (当且仅当 } x_0 = \frac{3\sqrt{5}}{5}, y_0 = \frac{\sqrt{10}}{10} \text{ 时取等号)}$$

$\therefore S_{\Delta M_2 N F_2} - S_{\Delta M_1 N F_1}$ 的最大值是 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 12分

22. (1) 函数定义域为 $(1, +\infty)$, $f'(x) = 2ax + \frac{1}{x-1} = \frac{2ax^2 - 2ax + 1}{x-1}$

二次函数 $\varphi(x) = 2ax^2 - 2ax + 1$ 的对称轴是 $x = \frac{1}{2}$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 1$

(1) 若 $a \geq 0$ 时, 在 $(1, +\infty)$ 上 $\varphi(x) > 0$, 从而 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(1, +\infty)$;

..... 2分

(2) 若 $a < 0$ 时, $x \in (1, \frac{a - \sqrt{a^2 - 2a}}{a})$, $f'(x) > 0$; $x \in (\frac{a - \sqrt{a^2 - 2a}}{a}, +\infty)$, $f'(x) < 0$,

\therefore 函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(1, \frac{a - \sqrt{a^2 - 2a}}{a})$; 单调递减区间是 $(\frac{a - \sqrt{a^2 - 2a}}{a}, +\infty)$; 4分

$(\frac{a - \sqrt{a^2 - 2a}}{a})$ 写成 $\frac{a + \sqrt{a^2 - 2a}}{a}$, 其它正确, 只扣 1 分

(2) 由对称性不妨设 $x_1 < x_2$,

$$\therefore f(2) = 4a, \therefore f(x_1) + f(x_2) = 2f(2)$$

若 $2 \leq x_1 < x_2$, $a > 0$, 由(1)得 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 有

$f(2) < f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_1) + f(x_2) > 2f(2)$, 与已知条件矛盾;

$x_1 < x_2 \leq 2$ 时, 同理可推出矛盾.

$$\therefore \frac{3}{2} < x_1 < 2 < x_2, \therefore 2 < 4 - x_1, \text{ 6分}$$

要证明: $x_1 + x_2 < 4$, 只需证明: $x_2 < 4 - x_1$

$\therefore a > 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, \therefore 只需证明: $f(x_2) < f(4 - x_1)$

又 $\therefore f(x_1) + f(x_2) = 8a$, \therefore 只需证明: $8a - f(x_1) < f(4 - x_1)$

构造函数 $h(x) = f(4 - x) + f(x) - 8a$, $x \in (\frac{3}{2}, 2)$, 8分

其中 $h(2) = 2f(2) - 8a = 0$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= -f'(4-x) + f'(x) = 2ax + \frac{1}{x-1} - 2a(4-x) - \frac{1}{3-x} \\ &= 4a(x-2) + \frac{4-2x}{(x-1)(3-x)} = (x-2) \left[4a - \frac{2}{(x-1)(3-x)} \right] \end{aligned}$$

$$\because \frac{3}{2} < x < 2, \therefore x-2 < 0, \frac{2}{(x-1)(3-x)} < \frac{8}{3}$$

$$\text{当 } a > 2 \text{ 时, } 4a - \frac{2}{(x-1)(3-x)} > 0$$

$$\therefore h'(x) < 0, h(x) \text{ 在 } \left(\frac{3}{2}, 2\right) \text{ 单调递减, } h(x) > h(2) = 0$$

$$\therefore x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) \text{ 时, } f(4-x) + f(x) - 8a > 0$$

$$\therefore 8a - f(x_1) < f(4-x_1) \text{ 成立}$$

$$\therefore f(x_2) < f(4-x_1)$$

由 $f(x)$ 在定义域内单调递增得, $x_2 < 4-x_1$, 即 $x_1 + x_2 < 4$ 成立. 12 分

(从函数的凸凹性判断并证明酌情给分)