# 德阳市高中2020级第一次诊断考试

# 数学参考答案与评分标准

## （文科）

**一、选择题**（每小题5分，共60分）

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | A | C | B | C | D | D | C | B | A | B | B | D |

**二、填空题**（每小题5分，共20分）

13. 2　　14. $\frac{1}{2}$　　15. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$　　16. $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3},1\right)$.

**三、解答题**

17. 解：(1) 由题意知：$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{dn^2+(2-d)n}{2}$

所以 $S_{2n}=\frac{4dn^2+2(2-d)n}{2}$

所以$\frac{S_n}{S_{2n}}=\frac{dn^2+(2-d)n}{4dn^2+2(2-d)n}=\frac{dn+2-d}{4dn+4-2d}$为常数.

因为 $d\neq 0$，故只要$\frac{d}{4d}=\frac{2-d}{4-2d}$，解得 $d=2$

此时 $a_n=2n-1$. ………………………………………………………… 6分

(2) 由(1)知 $a_n=2n-1$，$b_n=2^{n-1}\cdot a_n=(2n-1)2^{n-1}$.

所以 $T_n=1\times 2^0+3\times 2^1+\cdots+(2n-1)\times 2^{n-1}$

得 $2T_n=1\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+(2n-3)\times 2^{n-1}+(2n-1)\times 2^n$

两式相减得：$-T_n=1\times 2^0+2\times 2^1+\cdots+2\times 2^{n-1}-(2n-1)\times 2^n$

$=1+2\times\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)\times 2^n$

$=(3-2n)\times 2^n-3$

所以 $T_n=(2n-3)\times 2^n+3$ ………………………………………………… 12分

18. 解：(1) 在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理及 $\frac{b}{a}=\frac{\cos B+1}{\sqrt{3}\sin A}$

得：$\sqrt{3}\sin A\cdot\sin B=\sin A\cdot\cos B+\sin A$

因为 $\sin A\neq 0$，所以 $\sqrt{3}\sin B-\cos B=1$ 即 $\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

得：$B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$

解得 $B=\frac{\pi}{3}$. …………………………………………………………… 6 分

(2) 若选条件 ①：$\cos A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$b=1$. 易知符合条件的 $\triangle ABC$ 存在且唯一.

$AC$ 边上的高为 $c\cdot\sin A$.

由 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 得：$\sin A=\frac{\sqrt{6}}{3}$

所以 $\sin C=\sin(\pi-A-B)=\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sin A+\sqrt{3}\cos A}{2}=\frac{\sqrt{6}+3}{6}$.

故 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\frac{\sqrt{6}+3}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}$，所以 $AC$ 边上的高为 $c\cdot\sin A=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{9}$.

…………………………………………………………………… 12 分

若选条件 ②：$b=2$，$c=2\sqrt{3}$，由于 $c\cdot\sin B=3>2$，所以符合条件的 $\triangle ABC$ 不存在.

若选条件 ③：$a=3$，$c=2$，由余弦定理得：$b^2=9+4-2\times3\times2\times\cos\frac{\pi}{3}=7$.

所以 $b=\sqrt{7}$ …………………………………………………………… 8 分

由正弦定理 $\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b}$ 得：$\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{\left(2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$. ……… 11 分

所以 $AC$ 边上的高为 $a\cdot\sin C=\frac{3\sqrt{21}}{}$. ……………………………… 12 分

19. 解：(1) 由题得：$\bar{x}=8$，$\bar{y}=6.5$

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{8}x_iy_i-8\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{8}x_i^2-8\bar{x}^2}=\dfrac{459.5-8\times8\times6.5}{580-8\times64}=0.64$

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=6.5-0.64\times8=1.38.$

故月利润 $y$（千元）关于月销售量 $x$（百个）的回归方程为：$y=0.64x+1.38.$

…………………………………………………………………… 6 分

(2) 设装有“五年高考三年模拟”玩偶的盲盒为 1、2、3；装有“教材全解”玩偶的盲盒为 $a$、$b$、$c$. 则从 6 个盲盒中随机选出 3 个的所有可能情况有：(1、2、3)，(1、2、$a$)，(1、2、$b$)，(1、2、$c$)，(1、3、$a$)，(1、3、$b$)，(1、3、$c$)，(2、3、$a$)，(2、3、$b$)，(2、3、$c$)，(1、$a$、$b$)，(1、$a$、$c$)，(1、$b$、$c$)，(2、$a$、$b$)，(2、$a$、$c$)，(2、$b$、$c$)，(3、$a$、$b$)，(3、$a$、$c$)，(3、$b$、$c$)，($a$、$b$、$c$) 共 20 种情况，其中装有“五年高考三年模拟”玩偶的个数至少为 2 个的有 10 种情况.

故 3 个盲盒中装有“五年高考三年模拟”玩偶的个数至少为 2 个的概率为 $\dfrac{1}{2}$.

…………………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1) 因为 $f'(x)=x^2+(a-1)x-a=(x+a)(x-1)$

令 $f'(x)=0$ 解得：$x=1$ 或 $x=-a$ …………………………… 1 分

因为 $a>0$，可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,-a)$ 上单增，$(-a,1)$ 上单减，$(1,+\infty)$ 上单增. …………………………………………………………… 2 分

所以 $f(x)_{极大值}=f(-a)=\dfrac{1}{6}a^3+\dfrac{1}{2}a^2$ ……………………………… 3 分

$f(x)_{极小值}=f(1)=-\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{6}.$ ……………………………………… 4 分

(2) 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(-\infty,-a)$ 上单增，$(-a,1)$ 上单减，$(1,+\infty)$ 上单增.

当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单减，在 $[1,2]$ 上单增.

所以 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 的最小值 $m=f(1)=-\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{6}$. …………… 5 分

最大值 $M$ 为 $f(-1)=\dfrac{3a}{2}-\dfrac{5}{6}$ 与 $f(2)=\dfrac{2}{3}$ 的较大者.

因为 $f(-1)-f(2)=\frac{3a}{2}-\frac{3}{2}>0$，所以 $M=\frac{3a}{2}-\frac{5}{6}$. …………………… 7 分

因为 $M+m\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，即 $M+m=f(-1)+f(1)=a-1\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

所以 $a\in\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$. …………………………………………………… 8 分

$f(x)$ 的三个零点 $x_1,x_2,x_3$ 为方程 $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}(a-1)x^2-ax=0$ 的三个根，显然一根为 0，不妨设 $x_3=0$，那么 $x_1,x_2$ 为方程 $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}(a-1)x-a=0$ 的两根，所以 $x_1x_2=-3a$. …………………………………………………… 9 分

故 $f(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=f(-3a)=-\frac{9a^3+3a^2}{2}\left[a\in\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)\right]$. ……………………………………………………………… 10 分

令 $g(a)=-\frac{9a^3+3a^2}{2}\left[a\in\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)\right]$

有 $g'(a)=-\frac{27a^2+6a}{2}<0\left[a\in\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)\right]$

即 $g(a)=-\frac{9a^3+3a^2}{2}$ 在 $\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$ 上单减 …………………………………… 11 分

所以 $g(a)$ 的值域为 $\left(g\left(\frac{5}{3}\right),g\left(\frac{4}{3}\right)\right)=\left(-25,-\frac{40}{3}\right)$.

即 $f(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$ 的取值范围为 $\left(-25,-\frac{40}{3}\right)$. ……………… 12 分

21.解：(1) 因为 $f'(x)=\frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}(x>0)$，令 $g(x)=(1-x)e^x-1(x>0)$

因为 $g'(x)=-xe^x<0$ 即 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单减

所以 $g(x)<g(0)=0$，故 $f'(x)<0$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单减. …………………………………………… 4 分

(2) 先证当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)<1$ 即 $\frac{x}{e^x-1}<1\Leftrightarrow e^x>x+1,x>0$.

令 $g(x)=e^x-x-1,x>0$.

因为 $g'(x)=e^x-1>e^0-1=0$ 即 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增

所以 $g(x)>g(0)=0$，故 $f(x)<1$. ………………………………… 8 分

再证当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\dfrac{1}{e^x+1}<f(x)\Leftrightarrow(x-1)e^x+x+1>0,x>0$.

令 $h(x)=(x-1)e^x+x+1,x>0$.

因为 $h'(x)=xe^x+1>0$ 即 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增

所以 $h(x)>h(0)=0$，故 $\dfrac{1}{e^x+1}<f(x)$.

综上，$\dfrac{1}{e^x+1}<f(x)<1$. …………………………………………… 12 分

22. 解：(1) 曲线 $C_1$ 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-2\sqrt{3}\rho\sin\theta+3=0$. …………… 2 分

设直线 $l$ 的极坐标方程为 $\theta=\alpha$，直线 $l$ 与曲线 $C_1$ 的交点极坐标分别为 $A(\rho_A,\alpha)$，$B(\rho_B,\alpha)$，则 $|OA|\cdot|OB|=|\rho_A|\cdot|\rho_B|$.

因为 $\rho_A$、$\rho_B$ 是方程 $\rho^2-2\rho\cos\alpha-2\sqrt{3}\rho\sin\alpha+3=0$ 的两根，故 $\rho_A\cdot\rho_B=3$.

所以 $|OA|\cdot|OB|$ 为常数 3. ……………………………………………… 5 分

(2) 若直线 $l$ 平分曲线 $C_1$，则直线 $l$ 的直角坐标方程为 $y=\sqrt{3}x$，易知 $|AB|=2$.

……………………………………………………………………………………… 6 分

直线 $OP$ 的方程为 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 代入曲线 $C_2$ 的参数方程 $\begin{cases}x=3t^2\\ y=\sqrt{3}t\end{cases}$

得 $\sqrt{3}t=-\sqrt{3}t^2$

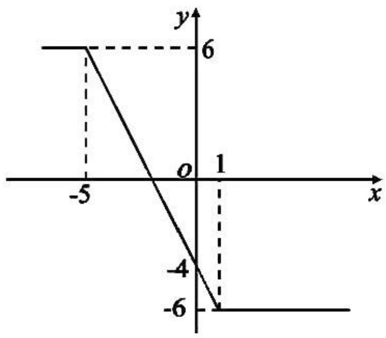
所以点 $P$ 的坐标为 $(3,-\sqrt{3})$，故 $|OP|=2\sqrt{3}$，所以 $\triangle PAB$ 的面积为 $2\sqrt{3}$.

……………………………………………………………………………… 10 分

23. 解：(1) 因为 $y=f(x-1)-f(x+5)$

$$=|x-1|-|x+5|$$

$$=\begin{cases}6,x\leqslant-5\\ -2x-4,-5<x\leqslant1.\\ -6,x>1\end{cases}$$




故 $y=f(x-1)-f(x+5)$ 的图象为

根据图象得原不等式的解集为$[0,+\infty)$. …………………………………… 5 分

(2) $f(x-1)-f(x+5)+kf(x+2)\geqslant 0 \Leftrightarrow |x-1|-|x+5|+k|x+2|\geqslant 0$ 恒成立.

当 $x=-2$ 时,不等式显然成立.

当 $x\neq -2$ 时,原不等式 $\Leftrightarrow k\geqslant \dfrac{|x+5|-|x-1|}{|x+2|}$

$$=\left|1+\frac{3}{x+2}\right|-\left|1-\frac{3}{x+2}\right|.$$

令 $t=\dfrac{1}{x+2}$,$t\neq 0$,那么只要 $k\geqslant |1+3t|-|1-3t|$ 在 $t\neq 0$ 时恒成立.

因为 $|1+3t|-|1-3t|\leqslant |1+3t+1-3t|=2$,所以只要 $k\geqslant 2$ 即可.

故实数 $k$ 的取值范围为$[2,+\infty)$. …………………………………… 10 分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。