

2023—2024 学年第一届安徽百校大联考  
高三数学参考答案

1. 【答案】 D  
【解析】 根据题意, 集合  $A = \{x | x > 1 \text{ 或 } x < 0\}$ ,  $A \cap B = \{x | 1 < x < 3\}$ , 故选 D.
2. 【答案】 A  
【解析】 命题“ $\exists x \in (1, +\infty), x^2 \in (1, +\infty)$ ”的否定是“ $\forall x \in (1, +\infty)$ , 都有  $x^2 \notin (1, +\infty)$ ”, 故选 A.
3. 【答案】 C  
【解析】 已知角  $\alpha$  终边上有一点  $P\left(\sin \frac{2\pi}{3}, \cos \frac{2\pi}{3}\right)$ , 即点  $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ,  
 $\therefore \alpha = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ,  
 $\therefore \pi - \alpha = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$  为第三象限角, 故选 C.
4. 【答案】 C  
【解析】 令函数  $m(x) = f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \cos x$ ,  $m(-x) = \frac{1}{2}x^2 + \cos x$ ,  
 $\therefore m(x) = m(-x)$ ,  $\therefore$  函数  $m(x)$  为偶函数,  
又  $\because m(0) = 1$ , 且  $m'(x) = x - \sin x$ , 当  $x > 0$  时,  $m'(x) > 0$ ,  
 $\therefore$  函数  $m(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递增, 故选 C.
5. 【答案】 B  
【解析】 根据题意, 当  $x = 0$  时,  $f(0) = 2 \tan \frac{\pi}{4} = 2$ ,  
又  $\because \triangle ABC$  的面积为  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times AB = \frac{\pi}{2} \Rightarrow AB = \frac{\pi}{2}$ ,  
 $\therefore$  函数  $f(x)$  的周期为  $\frac{\pi}{2}$ , 可得周期  $T = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = 2$ , 故选 B.
6. 【答案】 C  
【解析】 根据题意, 函数  $f(x)$  为偶函数, 则函数  $f(x)$  关于  $y$  轴对称,  
 $\therefore f(1-x) = -f(1+x)$ ,  $\therefore$  函数  $f(x)$  关于点  $(1, 0)$  呈中心对称,  
分析可得: 函数  $f(x)$  的周期为 4,  $x = 2$  为函数  $f(x)$  的对称轴,  $f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right)$ ,  
根据  $f(1) = 0$ , 周期为 4,  $\therefore f(2023) = f(1) = 0$ , 故选 C.
7. 【答案】 B  
【解析】 根据题意: 当  $x_1 > x_2$  时,  
 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 1 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) > x_1 - x_2 \Rightarrow f(x_1) - x_1 > f(x_2) - x_2$ ,  
可得函数  $h(x) = f(x) - x$  单调递增,  
当  $x_1 < x_2$  时, 同理可得函数  $h(x) = f(x) - x$  单调递增,  
则  $f(2\log_2 x) - f(x) > \log_2 x^2 - x \Rightarrow f(2\log_2 x) - \log_2 x^2 > f(x) - x$ ,  
 $\therefore \log_2 x^2 > x \Rightarrow x^2 > 2^x$ , 得  $2 < x < 4$ , 则不等式的解集为  $(2, 4)$ , 故选 B.

8. 【答案】 D

【解析】 设  $OD=x(x>0)$ , 则  $CD=2x$ ,

在  $\triangle GOD$  中,  $OG^2=OD^2+DG^2-2OD \cdot DG \cdot \cos \angle ODG=x^2+4+2x$ ,

在  $\triangle GDC$  中,  $GC^2=DC^2+DG^2-2DC \cdot DG \cdot \cos \angle CDG=4x^2+4-4x$ ,

$$\text{故 } \frac{GC^2}{OG^2} = \frac{4x^2+4-4x}{x^2+4+2x} = 4 \frac{12(x+1)}{(x+1)^2+3} = 4 \frac{12}{(x+1)+\frac{3}{x+1}} \geq 4-2\sqrt{3},$$

$$\therefore \left(\frac{GC}{OG}\right)_{\min} = \sqrt{3}-1, \text{ 当 } x+1 = \frac{3}{x+1} \text{ 时, 即 } x = \sqrt{3}-1 \text{ 取“=”},$$

$$\therefore OC = 3x = 3(\sqrt{3}-1),$$

$\therefore$  当  $\frac{GC}{OG}$  取最小值时, 菊花的种植面积  $= OA \times OC = \sqrt{3} \times 3(\sqrt{3}-1) = 9-3\sqrt{3}$ , 故选 D.

9. 【答案】 BC

【解析】 根据题意可得: 满足条件的  $\triangle ABC$  有两个, 可得  $AB \times \sin B = \frac{3}{2}$ ,  $\therefore \frac{3}{2} < AC < \sqrt{3}$ ,

故选 BC.

10. 【答案】 ABD

【解析】 根据题意:  $e^{e^{\pi}} > e^{\pi} = 1 = \ln e > \ln 2$ , 故选项 A 正确;

$$e^{\pi} > \pi^e \Rightarrow \pi \ln e > e \ln \pi, \text{ 得 } \frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi},$$

$$\text{设 } h(x) = \frac{\ln x}{x}, h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2},$$

令  $h'(x) = 0$ , 得  $x = e$ ,

① 当  $x \in (0, e)$  时,  $h'(x) > 0$ , 函数  $h(x)$  单调递增;

② 当  $x \in (e, +\infty)$  时,  $h'(x) < 0$ , 函数  $h(x)$  单调递减,

$\therefore h(\pi) < h(e)$ , 故选项 B 正确;

$$\log_2 2 = \log_2 \sqrt[3]{8} < \log_2 \sqrt[3]{9} = \frac{2}{3},$$

$$\log_2 3 = \log_2 \sqrt[3]{27} > \log_2 \sqrt[3]{25} = \frac{2}{3},$$

$\therefore \log_2 2 < \log_2 3$ , 故选项 C 错误;

$$\text{令 } f(x) = \ln x - \frac{x}{e} (x > 0), \text{ 则 } f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{xe},$$

① 当  $x \in (e, +\infty)$  时,  $e-x < 0$ ,  $f'(x) < 0$ , 函数  $f(x)$  单调递减;

② 当  $x \in (0, e)$  时,  $e-x > 0$ ,  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  单调递增,

$\therefore$  当  $x = e$  时,  $f(x)$  取最大值,  $f(x)_{\max} = f(e) = \ln e - \frac{e}{e} = 1 - 1 = 0$ .

$\therefore$  函数  $f(x)$  的值域为  $(-\infty, 0]$ ,

$\therefore f(x) = \ln x - \frac{x}{e} \leq 0$ , 即  $\ln x \leq \frac{x}{e}$ , 当且仅当  $x = e$  时, 等号成立,

$$\ln 3 < \frac{3}{e} \Rightarrow e \ln 3 < 3, \text{ 故选项 D 正确,}$$

故选 ABD.

高三数学参考答案 第 2 页 (共 9 页)

11. 【答案】 ACD

【解析】 已知函数  $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ , 可知其值域为  $[-2, 2]$ , 故选项 A 正确;

另知  $|x_1 - x_2|$  的最小值为  $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$ , 故选项 B 错误;

函数  $f(x)$  的单调递增区间为  $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq \omega x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,

$$x \in \left[ \frac{2k\pi - \frac{5\pi}{6}}{\omega}, \frac{2k\pi + \frac{\pi}{6}}{\omega} \right] (k \in \mathbf{Z}),$$

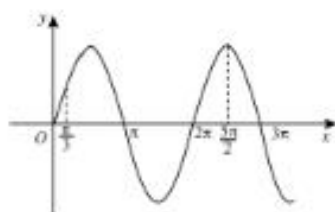
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2k\pi - \frac{5\pi}{6}}{\omega} \leq -\frac{\pi}{6} \\ \frac{2k\pi + \frac{\pi}{6}}{\omega} \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}, \text{令 } k=0, \text{ 则 } 0 < \omega \leq \frac{1}{2}, \therefore \omega \text{ 的取值范围为 } \left(0, \frac{1}{2}\right], \text{ 故选项 C 正确;}$$

若函数  $f(x)$  在区间  $(0, \pi)$  上恰有 3 个极值点和 2 个零点,

由右图可得:  $\frac{5\pi}{2} < \omega\pi + \frac{\pi}{3} \leq 3\pi \Rightarrow \frac{13}{6} < \omega \leq \frac{8}{3}$ ,

$\therefore \omega$  的取值范围为  $\left(\frac{13}{6}, \frac{8}{3}\right]$ , 故选项 D 正确;

故选 ACD.



12. 【答案】 ABD

【解析】 函数  $f(x)$  的图象如图:

令  $f(x) = t$ , 则  $h(x) = t^2 - at + \frac{1}{16}$ ,

(1) 若关于  $t$  的方程仅有一解, 则  $\Delta = a^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$ ,

① 当  $a = -\frac{1}{2}$  时, 令  $t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{16} = 0 \Rightarrow \left(t + \frac{1}{4}\right)^2 = 0$ ,

求得  $t = -\frac{1}{4}$ ,

$\therefore a = -\frac{1}{2}$  时,  $f(x) = -\frac{1}{4}$  仅有一解,

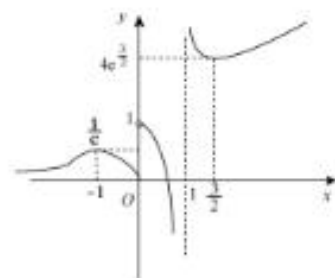
② 当  $a = \frac{1}{2}$  时, 求得  $t = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}$  有 3 解, 故选项 A 正确;

(2) 若关于  $t$  的方程有两解, 不妨令  $t_1 < t_2$ ,

则  $t_1 + t_2 = a, t_1 \cdot t_2 = \frac{1}{16}$ ,

① 若使原函数有 4 个零点, 情况如下:

(A)  $t_1 = 0, t_2 = \frac{1}{e}$  或  $t_2 > 4e^{\frac{1}{2}}$ , 此种情况与  $t_1 \cdot t_2 = \frac{1}{16}$  矛盾;



(B)  $t_1 < 0, t_2 \in (0, \frac{1}{e})$ , 此种情况与  $t_1 \cdot t_2 = \frac{1}{16}$  矛盾;

(C)  $0 < t_1 < \frac{1}{e}, t_2 = 4e^{\frac{3}{2}}$ ;

(D)  $0 < t_1 < \frac{1}{e}, \frac{1}{e} < t_2 < 1$ .

若情况(C)成立, 即:  $t_1 \cdot 4e^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{16} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{64e^{\frac{3}{2}}}$ ,

$\Rightarrow a = \frac{1}{64e^{\frac{3}{2}}} + 4e^{\frac{3}{2}}$ , 故选项 B 正确;

情况(D)无需再考虑.

②若原函数有 5 个零点, 则必有  $0 < t_1 < \frac{1}{e}, t_2 > 4e^{\frac{3}{2}}$ ,

则  $t^2 - at + \frac{1}{16} = 0$  的两根落在  $(0, \frac{1}{e}), (4e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$ ,

$$\begin{cases} \frac{1}{e^2} - a \cdot \frac{1}{e} + \frac{1}{16} < 0 \\ 16e^3 - a \cdot 4e^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{16} < 0 \end{cases}, \text{可得 } a > \frac{1}{64e^{\frac{3}{2}}} + 4e^{\frac{3}{2}}, \text{故选项 C 错误};$$

③若原函数有 6 个零点, 则  $0 < t_1 < \frac{1}{e}, 0 < t_2 < \frac{1}{e}$ ,

$$\begin{cases} \Delta = a^2 - \frac{1}{4} > 0 \\ 0 < \frac{a}{2} < \frac{1}{e} \\ \frac{1}{e^2} - a \cdot \frac{1}{e} + \frac{1}{16} > 0 \end{cases}, \text{可得 } \frac{1}{2} < a < \frac{1}{e} + \frac{e}{16}, \text{故选项 D 正确}.$$

故选 ABD.

13. 【答案】 1

【解析】 根据题意:  $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} = 1$ .

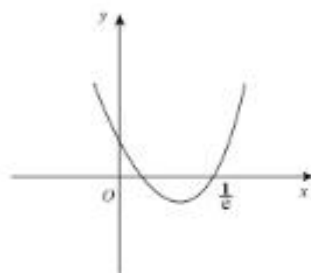
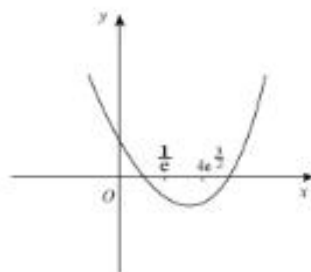
14. 【答案】 (0,0)

【解析】 根据题意: 函数  $f(x) = \ln x - ax + 1$  在  $x=1$  处有切线,  $\therefore$  切点为  $(1, 1-a)$ ,

又:  $f'(x) = \frac{1}{x} - a$ , 故切线斜率为  $1-a$ ,

$\therefore$  直线  $l$  的方程为  $y - (1-a) = (1-a)(x-1) \Rightarrow y = (1-a)x$ ,

$\therefore$  该直线过定点的坐标为  $(0,0)$ .



15. 【答案】  $\frac{9\sqrt{3}}{8}$

【解析】 根据题意, 已知  $CD=2BD \Rightarrow AC=2AB$ ,

又  $\because S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABC}$ ,

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times AB \times AD + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times AC \times AD = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times AB \times AC \Rightarrow AB = \frac{3}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times AB \times AC = \frac{9\sqrt{3}}{8}.$$

16. 【答案】  $\left(\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}, 3\right]$

【解析】 根据题意可得:  $2m^2 + 2n^2 + 6mn = 27 \Rightarrow 2(m+n)(m^2 + n^2 - mn) + 6mn = 27$ ,

设  $m+n=t$ ,

原式可得:  $2t(t^2 - 3mn) + 6mn = 27 \Rightarrow 2t^3 - 6tmn + 6mn = 27$ ,

$$\therefore \frac{2t^3 - 27}{6t - 6} = mn,$$

$$\because m, n > 0, \therefore \frac{2t^3 - 27}{6t - 6} > 0 \Rightarrow 0 < t < 1 \text{ 或 } t > \frac{3\sqrt[3]{4}}{2},$$

$$\text{又} \because \frac{2t^3 - 27}{6t - 6} = mn \leq \frac{t^2}{4},$$

$$\therefore \frac{2t^3 - 27}{6t - 6} \cdot \frac{t^2}{4} \leq 0, \text{化简得 } (t-1)(t^2 + 3t^2 - 54) \leq 0,$$

① 当  $0 < t < 1$  时, 不等式不成立;

$$\text{② 当 } t > \frac{3\sqrt[3]{4}}{2} \text{ 时, } t^2 + 3t^2 - 54 \leq 0, \text{ 可得 } \frac{3\sqrt[3]{4}}{2} < t \leq 3,$$

$$\therefore m+n \text{ 的取值范围为 } \left(\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}, 3\right].$$

17. 【解析】 (1) 由题知, 当  $m=1$  时,

$$B = \{x \mid x^2 - 2x - 3 \leq 0\} = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\},$$

$$\therefore A \cup B = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \complement_{\mathbb{R}} A \cap \complement_{\mathbb{R}} B = \complement_{\mathbb{R}} (A \cup B) = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 3\}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要不充分条件, 则  $B \subsetneq A$ ,

$$B = \{x \mid x^2 - 2mx - 3m^2 \leq 0\} = \{x \mid (x+m)(x-3m) \leq 0\}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

① 当  $m=0$  时, 集合  $B = \{0\}$ , 满足题意;  $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

② 当  $m < 0$  时, 集合  $B = \{x \mid 3m \leq x \leq -m\}$ ,

$$\therefore \begin{cases} 3m \geq -\frac{1}{2} \\ -m \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{1}{6} \\ m \geq -2 \end{cases}, \text{若同时取“}=\text{”} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{6} \\ m = -2 \end{cases}, \text{显然不成立,}$$

$$\therefore \text{可得 } -\frac{1}{6} \leq m < 0; \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$



③当  $m > 0$  时, 集合  $B = \{x \mid -m \leq x \leq 3m\}$ ,

$$\therefore \begin{cases} -m \geq -\frac{1}{2} \\ 3m \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m \leq \frac{2}{3} \end{cases}, \text{显然不能同时取“=”, 理由同上,}$$

$\therefore$  可得  $0 < m \leq \frac{1}{2}$ . ..... 9分

综上, 实数  $m$  的取值范围为  $\left\{m \mid \frac{1}{6} \leq m \leq \frac{1}{2}\right\}$ . ..... 10分

18. 【解析】 (1) 根据图象可知,  $A=2$ , 函数  $f(x)$  过点  $(0, 1)$ ,

$$\therefore 2\sin\varphi = 1 \Rightarrow \sin\varphi = \frac{1}{2}, \text{且 } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}, \text{ ..... 2分}$$

又  $\because$  函数  $f(x)$  过点  $\left(\frac{11\pi}{12}, 0\right)$ ,

$$\therefore \text{由图象可知 } \frac{11\pi}{12}\omega + \frac{\pi}{6} = 2\pi, \text{得 } \omega = 2, \text{ ..... 4分}$$

$$\therefore f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right). \text{ ..... 6分}$$

(2) 根据题意可得:

$$\text{函数 } f(x) \text{ 图象向右平移 } \frac{\pi}{4} \text{ 个单位得到 } y = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \text{ 的图象,}$$

$$\text{再横坐标伸长为原来的 2 倍得到 } y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \text{ 的图象,}$$

$$\text{最后向上平移 1 个单位得到函数 } g(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 \text{ 的图象, ..... 8分}$$

$$\text{令 } z = x - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(z - \frac{\pi}{3}\right) \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right], \text{ ..... 10分}$$

$$\therefore \text{函数 } g(x) \text{ 在区间 } (0, \pi) \text{ 上的值域为 } [-\sqrt{3} + 1, 3]. \text{ ..... 12分}$$

19. 【解析】 (1)  $\because$  函数  $f(x)$  是偶函数且定义域为  $\mathbf{R}$ ,

$$\therefore f(-1) = f(1),$$

$$\text{有 } \log_2\left(\frac{1}{4} + 1\right) + k = \log_2 5 - k, \text{解得 } k = 1, \text{ ..... 3分}$$

经检验  $k=1$  满足题意. .... 4分

(2) 函数  $g(x) = (2k)^{f(x)} - (m \cdot 2^x - m)$  ( $m > 0$ ) 的零点情况等价于

$$\text{方程 } 2^{f(x)} - (m \cdot 2^x - m) = 0 \text{ 的解的情况,}$$



即  $\frac{4^x+1}{2^x} = m \cdot 2^x - m$ ,  
 令  $2^x = t (t > 0)$ , 则  $(m-1)t^2 - mt - 1 = 0, t \in (0, +\infty) (*)$  ..... 6分  
 ①当  $m=1$  时,  $t=-1$ , 此时方程  $(*)$  无解; ..... 7分  
 ②当  $m>1$  时, 函数  $y=(m-1)t^2 - mt - 1$  开口向上, 且恒过定点  $(0, -1)$ ,  
 则  $t$  只有一解, 此时方程  $(*)$  只有一解; ..... 9分  
 ③当  $0 < m < 1$  时, 函数  $y=(m-1)t^2 - mt - 1$  开口向下, 且恒过定点  $(0, -1)$ ,  
 函数的对称轴  $t = \frac{m}{2(m-1)} < 0$ , 此时方程  $(*)$  无解. .... 11分  
 综上, 当  $0 < m \leq 1$  时函数  $g(x)$  无零点, 当  $m > 1$  时函数  $g(x)$  有一个零点. .... 12分

20. 【解析】 (1) 根据题意:  $\because$  函数  $f(x) \geq g(x), \therefore \cos 2x \geq \sin x$ ,  
 可得  $1 - 2\sin^2 x \geq \sin x$ ,  
 $\therefore 2\sin^2 x + \sin x - 1 \leq 0 \Rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 1) \leq 0$ ,  
 得  $-1 \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$ , ..... 2分  
 $\therefore$  可得  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  或  $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ,  
 $\therefore x$  的取值范围为  $\left\{ x \mid -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ 或 } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbf{Z}) \right\}$ . .... 4分  
 (2) 根据题意:  $h(x) = \frac{1}{2}f(x) + g\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2}\cos 2x + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ , ..... 5分  
 设  $t = \frac{\pi}{4} - x$ ,  
 $\therefore$  函数  $h(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Rightarrow m(t) = \frac{1}{2}\sin 2t + \sin t$ ,  
 可得  $m'(t) = \cos 2t + \cos t = 2\cos^2 t + \cos t - 1 = (2\cos t - 1)(\cos t + 1)$ , ..... 8分  
 令  $t \in [0, 2\pi)$ , 可得  $t = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi$ , ..... 9分  
 $\therefore m(0) = 0, m\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}, m(\pi) = 0, m\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}, m(2\pi) = 0$ ,  
 比较可得,  $m\left(\frac{\pi}{3}\right)$  的值最大, ..... 11分  
 $\therefore$  函数  $h(x)$  的最大值为  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ . .... 12分

高三数学参考答案 第7页(共9页)



21. 【解析】 (1) 根据题意:  $AB=AD=2$ ,  $\angle ADB=\frac{\pi}{6}$ ,  $\therefore \angle A=\frac{2\pi}{3}$ ,

利用余弦定理可得:

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB \cdot AD \cdot \cos A=12, \therefore BD=2\sqrt{3}, \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\text{又} \because C=\frac{\pi}{4}, AD \parallel BC,$$

$\therefore$  在  $\triangle BCD$  中, 利用正弦定理可得:

$$\frac{CD}{\sin \angle CBD} = \frac{BD}{\sin C} \Rightarrow CD = \frac{BD}{\sin C} \times \sin \angle CBD = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times \frac{1}{2} = \sqrt{6}. \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

(2) 设  $\angle ADB=\theta$ ,  $\therefore \angle CBD=\angle ADB=\theta$ ,

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times AB \times AD \times \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin(\pi-2\theta) = 2\sin 2\theta, \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BD}| |\overrightarrow{BC}| \cos \angle CBD = |\overrightarrow{BD}|^2,$$

在  $\triangle ABD$  中, 利用余弦定理可得:

$$|\overrightarrow{BD}|^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos(\pi-2\theta) = 8 + 8\cos 2\theta, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\therefore 2S + \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = 4\sin 2\theta + 4 + 4\cos 2\theta = 4\sqrt{2} \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 4,$$

$$\therefore \text{当 } \theta = \frac{\pi}{8} \text{ 时, } 2S + \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} \text{ 取最大值, 且为 } 4\sqrt{2} + 4. \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

22. 【解析】 (1) 根据题意:  $\therefore$  函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,

$$\therefore \text{当 } a=0 \text{ 时, } f(x) = (x-1)e^x - ex (x>0),$$

$$\text{记 } \varphi(x) = f'(x) = xe^x - e, \text{ 故 } \varphi'(x) = (x+1)e^x > 0,$$

$$\therefore f'(x) = xe^x - e \text{ 单调递增, } \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\text{又} \because f'(1) = 0,$$

$\therefore$  函数  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

$$\text{故 } f(x)_{\min} = f(1) = -e. \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

(2) 根据题意:  $\because x>0$ ,  $\therefore f'(x) = xe^x - a \ln x - e$  记  $m(x) = f'(x)$ ,

$$\therefore m'(x) = (x+1)e^x - \frac{a}{x} = \frac{x(x+1)e^x - a}{x}, \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

① 当  $a \leq 0$  时,  $m'(x) > 0$ , 可得函数  $m(x)$  为单调递增函数,





又 $\because m(1)=0$ ,  $\therefore$  函数  $f(x)$  在  $(0,1)$  上单调递减, 在  $(1,+\infty)$  上单调递增,  
 $\therefore$  函数  $f(x)$  只有一个极值点; ..... 7 分

②当  $a>0$  时, 令  $g(x)=x(x+1)e^x-a$ ,  $g'(x)=(x^2+3x+1)e^x$ ,  
 可见  $g'(x)>0$ ,  $\therefore g(x)$  是单调递增函数,  
 又 $\because g(0)=-a<0, g(a)=a(a+1)e^a-a>0$ ,  
 $\therefore$  存在唯一  $x_0 \in (0,a)$ , 使得  $g(x_0)=x_0(x_0+1)e^{x_0}-a=0 \Rightarrow a=x_0(x_0+1)e^{x_0}$ ,  
 $\therefore$  函数  $m(x)$  在  $(0,x_0)$  上单调递减, 在  $(x_0,+\infty)$  上单调递增,  
 $\therefore$  函数  $m(x)$  的最小值为  $m(x_0)=x_0e^{x_0}-a \ln x_0 - e - x_0e^{x_0}-x_0(x_0+1)e^{x_0} \ln x_0 - e$ , ..... 9 分

再令  $h(x)=xe^x-x(x+1)e^x \ln x - e$ ,  
 $h'(x)=(x+1)e^x-(x^2+3x+1)e^x \ln x - (1+x)e^x = -(x^2+3x+1)e^x \ln x$ ,  
 $\therefore$  函数  $h(x)$  在  $(0,1)$  上单调递增, 在  $(1,+\infty)$  上单调递减,  
 $\therefore h(x) \leq h(1) = 0 \Rightarrow h(x_0) \leq 0 \Rightarrow m(x)_{\min} = m(x_0) \leq 0$ ,  
 注意到  $x_0=1 \Rightarrow a=2e$  时,  $m(x)_{\min} = m(x_0)$ ,  
 此时  $m(x) \geq 0$  恒成立, 从而函数  $f(x)$  没有极值点;  
 当  $x_0 \neq 1 \Rightarrow a \in (0,2e) \cup (2e,+\infty)$  时,  $m(x)_{\min} = m(x_0) < 0$ ;  
 那么, 当  $a \rightarrow 0^+$ , 可取  $x=e^{-\frac{1}{a}} \rightarrow 0$ , 从而满足  $e^{-\frac{1}{a}} < x_0$ ,  
 且  $m(e^{-\frac{1}{a}}) = e^{-\frac{1}{a}} \cdot e^{e^{-\frac{1}{a}}} > 0$ ;  
 当  $a \rightarrow +\infty$ , 可取  $x=e^{\frac{1}{a}} \rightarrow +\infty$ , 从而满足  $x_0 > e^{\frac{1}{a}}$ ,  
 且  $m(e^{\frac{1}{a}}) = e^{\frac{1}{a}} \cdot e^{e^{\frac{1}{a}}} - \frac{a^2}{2} - e > e^{\frac{1}{a}} \cdot e^{e^{\frac{1}{a}}} - \frac{a^2}{2} - e = e \cdot e^{\frac{1}{a}} - \frac{a^2}{2} - e > e \left( \frac{a^2}{2} + a + 1 \right) - \frac{a^2}{2} - e > 0$ ,  
 此时函数  $f(x)$  在区间  $(0,x_0)$  存在一个极大值点, 在区间  $(x_0,+\infty)$  存在一个极小值点.  
 因此函数  $f(x)$  有两个极值点. .... 11 分

综上, 当  $a=2e$  时, 函数  $f(x)$  无极值点;  
 当  $a \leq 0$  时, 函数  $f(x)$  有一个极值点;  
 当  $a \in (0,2e) \cup (2e,+\infty)$  时, 函数  $f(x)$  有两个极值点. .... 12 分



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服

务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

