

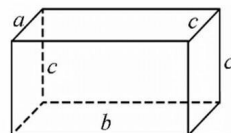
2022~2023 学年第二学期高一年级期末考试·数学

参考答案、提示及评分细则

1. B 由题意,集合 $A = \{y|y=2^x, x \in \mathbf{R}\} = \{y|y>0\} = (0, +\infty)$, $B = \{x|-1<x<5\} = (-1, 5)$, 根据集合交集的运算,可得 $A \cap B = \{x|0<x<5\} = (0, 5)$.

2. A 由余弦定理得 $20 = b^2 + 16 - 2 \times b \times 4 \times \frac{2}{3}$, 整理得 $3b^2 - 16b - 12 = 0$, 解得 $b = 6$ ($b = -\frac{2}{3}$ 舍去).

3. D 异面直线不具有传递性,可以以长方体为载体加以说明, a, b 异面,直线 c 的位置可如图所示.



4. C 设幂函数的解析式为 $f(x) = x^a$, $\because$ 幂函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $(16, 4)$, $\therefore 4 = 16^a$, 解得 $a = \frac{1}{2}$, $\therefore y = f(x) = \sqrt{x}$, 其定义域为 $[0, +\infty)$, 且是增函数, 当 $0 < x < 1$ 时, 其图象在直线 $y = x$ 的上方. 对照选项可知 C 满足题意.

5. C $|z| = |2+i| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$.

6. A 设球 O 的半径为 R , 则 $R^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2$, 解得: $R = 2$, $\therefore$ 球 O 的体积 $V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{32\pi}{3}$.

7. B 由已知可得 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$.

8. D 由题意, $\tan \beta = \tan(\alpha + \beta - \alpha) = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha}{1 + \tan(\alpha + \beta) \cdot \tan \alpha} = \frac{\frac{1}{7} + 2}{1 - \frac{2}{7}} = 3$. 由辅助角公式可得 $\sin \theta + \tan \beta \cos \theta =$

$\sqrt{1 + \tan^2 \beta} \sin(\theta + \varphi) = \sqrt{10} \sin(\theta + \varphi)$ (其中 $\tan \varphi = \tan \beta$), 其最大值为 $\sqrt{10}$, 此时 $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

故 $\tan \theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1}{\tan \varphi} = \frac{1}{3}$.

9. BC 因为 z_1 与 z_2 是共轭复数, 设 $z_1 = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0$), 则 $z_2 = a - bi$, 对于 A 选项, 当 $ab \neq 0$ 时, $z_1^2 = a^2 - b^2 + 2abi$, $|z_2|^2 = a^2 + b^2$, z_1^2 和 $|z_2|^2$ 不能比大小, A 选项错误; 对于 B 选项, $z_1 z_2 = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z_1 z_2|$, B 选项正确; 对于 C 选项, $z_1 + z_2 = (a + bi) + (a - bi) = 2a \in \mathbf{R}$, C 选项正确; 对于 D 选项, 若 $ab \neq 0$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{a - bi} = \frac{(a + bi)^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2 + 2abi}{a^2 + b^2} \notin \mathbf{R}$, D 选项错误.

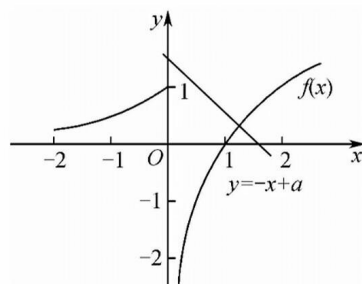
10. ABD 对于选项 A, 直线 l 不在平面 α 内, 直线 m 在平面 α 内, 但是, 直线 l 与 m 可以相交, 故 A 错误; 对于选项 B, 直线 l 不在平面 α 内, 直线 m 在平面 α 内, 但是, 直线 l 与 m 可以相交也可以平行, 故 B 错误; 对于选项 C, 直线 l 不在平面 α 内, 直线 m 在平面 α 内, 则直线 l 与直线 m 只可以平行或者相交, 不可能重合, 所以, 直线 l 与直线 m 至多一个公共点, 故 C 正确; 对于选项 D, 直线 l 不在平面 α 内, 直线 m 在平面 α 内, 则当直线 l 垂直于平面 α 时, 直线 l 与直线 m 垂直, 故 D 错误.

11. ACD 设点 P 距离水面的高度 h (米) 和时间 t (秒) 的函数解析式为 $h = A \sin(\omega t + \varphi) + B$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| <$

$$\frac{\pi}{2}), \text{由题意得} \begin{cases} h_{\max}=A+B=6, \\ h_{\min}=-A+B=-2, \\ T=\frac{2\pi}{\omega}=30, \\ h(0)=A\sin(\omega \times 0 + \varphi) + B=0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} A=4, \\ B=2, \\ \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{15}, \therefore h=4\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}\right)+2, \text{故 D 正确; 对} \\ \varphi=-\frac{\pi}{6}, \end{cases}$$

于 A, 令 $h=6$, 即 $6=4\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}\right)+2$, 即 $\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}\right)=1$, $\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$, 解得 $t=10$, 故 A 对; 对于 B, 令 $t=35$, 代入 $h=4\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}\right)+2$, 解得 $h=4$, 故 B 错误; 对于 C, 令 $t=25$, 代入 $h=4\sin\left(\frac{\pi}{15}t-\frac{\pi}{6}\right)+2$, 解得 $h=-2$, 故 C 对. 故选 ACD.

12. BD 画出 $f(x)$ 的图象如图所示, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0], (0, +\infty)$ 上递增, A 错误; $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, B 正确; $f(0)=1>\frac{1}{2}$, 所以 C 错误; $f(x)+x-a=0 \Rightarrow f(x)=-x+a$, 要使“关于 x 的方程 $f(x)+x-a=0$ 恰有一个实根”, 即 $f(x)$ 图象与 $y=-x+a$ 的图象只有一个交点, 则 $a>1$, 所以 D 正确. 故选 BD.



13. 9 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \times 4 \times 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9$.

14. $18\sqrt{2}$ 根据题意, 设 $\triangle ABC$ 的水平放置的直观图的面积为 S , 原图 $\triangle ABC$ 中, $AC=12$, 边 AC 上的高 $BD=12$, 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 12 \times 12 = 72$, 则有 $\frac{S}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, 则 $S = 72 \times \frac{\sqrt{2}}{4} = 18\sqrt{2}$.

15. 1 由 $|a+b|=2\sqrt{2}$, 得 $|a+b|^2 = |a|^2 + 2a \cdot b + |b|^2 = 8$, 因为 $|a|=2$, $a \cdot b = \frac{3}{2}$, 所以 $4 + 2 \times \frac{3}{2} + |b|^2 = 8$, 所以 $|b|=1$.

16. $\left(\frac{8}{3}, \frac{16}{5}\right) \cup \left(\frac{16}{3}, 8\right)$ 由 $\sin A = 2\sin B - \sin C$, 得 $a = 2b - c$, 即 $2b = a + c$, 故 B 不可能为钝角. ①当 A 为钝角, 则 $\begin{cases} b^2 + c^2 < a^2, \\ b + c > a, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} b^2 + (2b-4)^2 < 16, \\ b + 2b - 4 > 4, \end{cases}$ 解得 $\frac{8}{3} < b < \frac{16}{5}$; ②当 C 为钝角, 则 $\begin{cases} a^2 + b^2 < c^2, \\ a + b > c, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 16 + b^2 < (2b-4)^2, \\ 4 + b > 2b - 4, \end{cases}$ 解得 $\frac{16}{3} < b < 8$. 综上, b 的取值范围是 $\left(\frac{8}{3}, \frac{16}{5}\right) \cup \left(\frac{16}{3}, 8\right)$.

17. 解: (1) $\frac{2-x}{2+x} > 0$, 则 $-2 < x < 2$, $f(x)$ 的定义域为 $(-2, 2)$, 2 分
 $f(-x) = \lg \frac{2+x}{2-x} = -\lg \frac{2-x}{2+x} = -f(x)$, 故 $f(x)$ 是奇函数. 5 分
(2) $\frac{2-x}{2+x} = -1 + \frac{4}{x+2}$, 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $-1 + \frac{4}{x+2} \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$, 8 分
故 $f(x) \in [-\lg 3, \lg 3]$, 即 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 的值域为 $[-\lg 3, \lg 3]$ 10 分

18. 解: (1) $\because \lambda b = (-\lambda, 2\lambda), \mu c = (4\mu, \mu)$,
 $\therefore \lambda b - \mu c = (-\lambda - 4\mu, 2\lambda - \mu)$ 2 分



$$\text{又 } a = \lambda b - \mu c, \therefore \begin{cases} -\lambda - 4\mu = 3, \\ 2\lambda - \mu = 2, \end{cases} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} \lambda = \frac{5}{9}, \\ \mu = -\frac{8}{9}, \end{cases} \therefore \lambda + \mu = -\frac{1}{3}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) a + kb = (3-k, 2+2k), 2b-c = (-6, 3). \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$\therefore a+kb$ 与 $2b-c$ 共线,

$$\therefore 3(3-k) = -6(2+2k), \text{解得 } k = -\frac{7}{3}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解: (1) 因为 $-1+3i$ 是方程 $x^2+px+q=0$ 的一个根,

$$\therefore (3i-1)^2 + p(3i-1) + q = 0,$$

$$\therefore -8-p+q+(3p-6)i=0, \text{而 } p, q \in \mathbf{R}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore \begin{cases} -8-p+q=0, \\ 3p-6=0, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} p=2, \\ q=10, \end{cases} \therefore p+q=12. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \therefore z_1 = 5-10i, z_2 = 3+4i, \frac{1}{z} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1+z_2}{z_1 z_2},$$

$$\therefore z = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} = \frac{(5-10i)(3+4i)}{8-6i} = \frac{55-10i}{8-6i} = \frac{(55-10i)(8+6i)}{(8-6i)(8+6i)} = \frac{500+250i}{100} = 5 + \frac{5}{2}i, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \bar{z} = 5 - \frac{5}{2}i. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: 因为 VM 是棱锥的高, 所以 $VM \perp MC$.

$$\text{在 Rt}\triangle VMC \text{ 中}, MC = \sqrt{VC^2 - VM^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3, \text{所 } AC = 2MC = 6.$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中}, BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$AB \text{ 边上的斜高 } h_1 = \sqrt{VA^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21},$$

$$BC \text{ 边上的斜高 } h_2 = \sqrt{VC^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2} = \sqrt{25-5} = 2\sqrt{5}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(1) \text{四棱锥的表面积 } S = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{21} + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} \right) + 4 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{21} + 20 + 8\sqrt{5}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$(2) V_{\text{锥}} = \frac{1}{3} S_{\text{底}} h = \frac{1}{3} \times 4 \times 2\sqrt{5} \times 4 = \frac{32\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{所以四棱锥的体积为 } \frac{32\sqrt{5}}{3}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$21. \text{解: (1) 由题意可知, } A=1, \frac{T}{4} = \frac{\pi}{4}, \therefore T=\pi, \omega=2. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{函数图象过点 } \left(\frac{7}{12}\pi, -1 \right), \therefore \sin\left(\frac{7}{6}\pi + \varphi \right) = -1.$$

$\therefore \varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \therefore |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{3}, \therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$ 3 分

(2) $\therefore f(\alpha) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\alpha + \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$

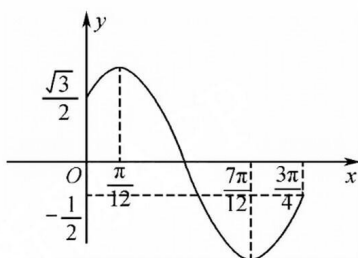
$\therefore k\pi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$ 5 分

$\therefore \alpha \in [0, \pi), \therefore 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6},$ 即 α 的取值范围是 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right].$ 6 分

(3) 令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \therefore -\frac{5}{12}\pi + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}.$

$\therefore x \in \left[0, \frac{3}{4}\pi\right], \therefore f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{12}\right]$ 上为增, 在 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$ 上为减, 在 $\left[\frac{7\pi}{12}, \frac{3}{4}\pi\right]$ 上为增. 8 分

作出 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $\left[0, \frac{3}{4}\pi\right]$ 上的图象.



..... 10 分

$\therefore f(x) = m$ 有两个零点, 即 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 与 $y = m$ 有两个交点. $\therefore -1 < m \leq -\frac{1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq m < 1.$

即实数 m 的取值范围是 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right).$ 12 分

22. 解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $\sqrt{3}a \sin C = c \cos A + c$, 由正弦定理可得,

$\sqrt{3} \sin A \sin C = \sin C \cos A + \sin C, \therefore \sin C \neq 0,$

则 $\sqrt{3} \sin A = \cos A + 1.$ 2 分

即 $\sqrt{3} \sin A - \cos A = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin A - \frac{1}{2} \cos A\right) = 1,$

$\sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$ 又 $A \in (0, \pi),$ 解得 $A = \frac{\pi}{3}.$ 5 分

(2) 由 $m = \frac{a+b}{c} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - C\right)}{\sin C} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos C + \frac{1}{2} \sin C}{\sin C} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \cos C)}{\sin C} + \frac{1}{2} =$

$\frac{\sqrt{3} \cos^2 \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{C}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2 \tan \frac{C}{2}} + \frac{1}{2}.$ 8 分

因为 $c > a$, 所以 $C > \frac{\pi}{3}$, 又 $B + C = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\frac{\pi}{3} < C < \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\frac{\pi}{6} < \frac{C}{2} < \frac{\pi}{3}$, 得 $\frac{\sqrt{3}}{3} < \tan \frac{C}{2} < \sqrt{3}$, 所以 $\frac{\sqrt{3}}{3} <$

$\frac{1}{\tan \frac{C}{2}} < \sqrt{3}$, 所以 $1 < m < 2$, 即 m 的取值范围是 $(1, 2).$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线